数理解析研究所講究録
第341巻 1978年 65-69

複素領域における singular solutions の積分表現について

上智大 理工 文内 忠

§0. $L(z,\partial)$ を Ω ($C^{n+1} \supset \Omega \ni 0$) の上の正則な函数を係数とする線型偏微分作用素とする $K = \{\varphi(z) = 0\}$ を $L(z,\partial)$ の特性曲面とする. $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega - K})$ で $(\Omega - K)$ の単連結被覆面 $(\widetilde{\Omega-K})$ 上の正則函数の集合を表わす。

$L(z,\partial)\, u(z) = 0 \quad u(z) \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega-K})$ なる $u(z)$ を積分で表示するのが目的である. Kの多重度が一定 $(=k)$ であるという条件のもとで考察する。このような解の存在については Hamada [1], Hamada Leray Wagschal [2] 及び多くの人により研究されている。

KがLevi条件を満さない場合, Kは常微分方程式における不確定特異点に類似していると考えられる。このことは上述の論文等で考察された singular Cauchy 問題において初期条件が pole であっても, 解は真性特異点をもつことに表われている。

特異点Kの近くでの $u(z)$ の漸近的挙動が考察できるような表現を得ることを目的とする。

§1. $C^{n+1} \ni z = (z_0, z') = (z_0, z_1, \quad , z_n)$ とし,

$\xi=(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \quad .\xi_n)$ とする． 作用素 $A(z.\partial)$ に対して，その主シンボルを $a(z,\xi)$ で表わす． 考察する作用素 $L(z.\partial)$ の条件を述べる．

(a)． $L(z.\partial)$ の主シンボル $l(z,\xi)$ は

$$(1.1)\qquad l(z.\xi)=q(z.\xi)\,p(z.\xi)^k$$

と分解できる． $p(z.\xi)$． $q(z.\xi)$ は，それぞれ m_1 次，m_2 次の ξ について の斉次多項式である．（$m=km_1+m_2$）

(b) $K=\{\varphi(z)=0\}$ は $\varphi(0,z')=z_1$ となる，$L(z.\partial)$ の特性曲面で

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} &p(z,\tfrac{\partial\varphi}{\partial z})\equiv 0, \qquad q(z.\tfrac{\partial\varphi}{\partial z})\neq 0 \\ &\left.\frac{\partial p}{\partial\xi_0}(z.\tfrac{\partial\varphi}{\partial z})\right|_{z_0=0}\neq 0 \end{aligned}$$

を満す．

$\Sigma_p=\{(z.\xi)\ ;\ p(z.\xi)=0\ ,\ \xi\neq 0\}$ とおく．

条件 (a) より

$$(1.3)\qquad L(z.\partial)=\sum_{i=0}^{m} Q_i(z.\partial)\,P(z,\partial)^{k_i}$$

と表示できる，ここで

$$(1.4)\qquad q_m(z.\xi)=q(z.\xi)$$

$$(1.5)\qquad k_i<\infty \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{ord} Q_i(z.\partial)P(z.\partial)^{k_i}=i \\ q_i(z.\xi)\neq 0 \quad \text{on } \Sigma_p \end{cases}$$

$$k_i=\infty \Rightarrow q_i(z.\xi)\equiv 0$$

(1.3) を用いて. Komatsu [3] により導入された非正則度 σ を定義する

(1.6) $\sigma = \max_{m-k+1 \le i \le m-1} \left\{ 1, \frac{k-k_i}{m-i} \right\}$

以下 $\sigma > 1$ として

(1.7) $\alpha = (\sigma - 1)/\sigma = l/q \qquad l.q \in N \quad (l.q) = 1$

とおく.

$L(z, \partial)$ の subcharacteristic polynomial $l\,sub(p; z, \xi, \eta)$ を次のように定義する.

(1.8) $l\,sub(p; z, \xi, \eta) = \sum_{i \in \Delta_0} g_i(z, \xi) \eta^{k_i} \qquad (z, \xi) \in \Sigma_p$,

ここで $\Delta_0 = \{m\} \cup \{ m-k+1 \le i \le m-1 \ ; \ \sigma = \frac{(k-k_i)}{(m-i)} \}$.

$l\,sub(p; z, \xi, \eta)$ について次の仮定をおく.

$l\,sub(p; 0, \frac{\partial \varphi(0)}{\partial z}, \eta) = 0$ は k 個の相異なる根をもつ.

§2. §1 で述べた仮定のもとで次の主定理が得られる.

定理

(2.1) $\begin{cases} L(z, \partial)\, u(z) = 0 \\ u(z) \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega - K}) \end{cases}$

を満たす $u(z)$ は $\Omega' (\subset \Omega)$ において次の様に表現できる;

(2.2) $\Omega_\theta = \{ z \in \Omega' ;\ |\arg \varphi(z) - \frac{\theta}{\alpha}| < \frac{\pi}{2} \}$

において

(2.3) $u(z) = \sum_{i=1}^{k} u^\theta_{I,i}(z) + u^\theta_{II}(z) + u^\theta_{III}(z) + \bar{u}^\theta(z)$,

ここで

(2.4) $u^\theta_{I,i}(z) = \int_{\Gamma(\theta_1)} \exp(-\lambda\varphi(z)) F_i(z,\lambda,\theta)(\log\lambda)\, d\lambda$,

(2.5) $u^\theta_{II}(z) = \int_{\Gamma(\theta_1)} \exp(-\lambda\varphi(z)) G(z,\lambda,\theta)(\log\lambda)\, d\lambda$,

(2.6) $u^\theta_{III}(z) = \sum_{n=0}^{r} \int_{\Gamma(\theta_1)} \exp(-\lambda\varphi(z)) H_n(z,\lambda,\theta)(\log\lambda)\, d\lambda$,

(2.7) $\bar{u}^\theta(z)$ は Ω' で正則

である。 また $\theta_1 = -\frac{\theta}{\alpha}$.

$\Gamma(\theta_1)$ は $\infty e^{i\theta_1}$ から出発して $\lambda = 0$ のまわり正の向きに g 回まわり $\infty e^{i(\theta_1+2\pi g)}$ へ行く道.

$F_i(z,\lambda,\theta)$, $G(z,\lambda,\theta)$, $H_n(z,\lambda,\theta)$ は $|\lambda| > \Lambda$ で正則な函数.

$F_i(z,\lambda,\theta)$, $G(z,\lambda,\theta)$ $H_n(z,\lambda,\theta)$ の構成, 及びその性質は長くなるので省略する。 詳細は Ōuchi [4] を見られたい.

$u^\theta_{I,i}(z)$ $(1 \le i \le k)$ が特異点 K の近くでの $u(z)$ の

挙動の本質的な部分を示す。 $u^0_{2,1}(z)$ の構成に subcharacteristic polynomial の性質が大きくかかわってくる。

この表現式の応用として $u(z)$ の $z_0=0$ における $\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^s u(0,z')$, $0\leq s\leq k-1$, がすべて $z_1=0$ において極をもつ函数の時, 上で得られた式を解析することにより, 漸近挙動をしらべると, 常微分方程式における Stokes 現象に対応することが起こることもわかる. これら詳細は Ōuchi [4] をみられたい.

References

[1] Hamada, C. R. 276 (1973) 1681–1684

[2] Hamada, Leray, Wagschal, J. Math. Pure Appl., 55 (1976) 297–352.

[3] Komatsu, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 23, (1976) 297–342.

[4] Ōuchi, Integral representations of singular solutions of linear partial differential operators in complex domains.