数理解析研究所講究録
第356巻 1979年 55-65

C^*-環のフビニ積について

新潟大 教育　　古谷 正

関数環のslice積，バナッハ空間の近似問題の1つの定式化，またはW^*-テンソル積の交換定理と同値な定理（定理1）のC^*-環化と考えられるC^*-環のフビニ積を，富山は[5]で定義した。すなわち，C，DをC^*-環とし，$C\otimes D$でCとDのspatialなC^*-テンソル積を表わす。$g\in C^*$に対し，$C\otimes D$からDへの$R_g(c\otimes d)=\langle g,c\rangle d$をみたす有界な線型写像$R_g$を右フビニ（またはslice）写像，同様に$h\in D^*$に対し，$C\otimes D$から$C$への$L_h(c\otimes d)=\langle h,d\rangle c$をみたす有界な線型写像$L_h$を左フビニ写像と呼ぶ。さらに$C$の$C^*$-部分環$A$，$D$の$C^*$-部分環$B$が与えられたとき，

$$F(A,B,C\otimes D)=\{x\in C\otimes D;\ R_g(x)\in B,\ L_h(x)\in A \text{ for all } g\in C^*,\ h\in D^*\}$$

で$C\otimes D$についてのAとBのフビニ積を定義する。

定義より，$A\otimes B\subseteq F(A,B,C\otimes D)$は常に成立することがわかる。そこで

$$(※) \qquad A \otimes B = F(A,\ B,\ C \otimes D)$$

が成立するかどうかが問題になる。

富山はAのすべての既約表現の次元がある有限次元以下なら、どんなC^*-環の組(B, C, D)についても、等式(※)が成立することを[5]で示した。一方、Wassermannは等式(※)が成立しない例を[8]で初めて与えた。

一般にC^*-環$A \subseteq C_1 \subseteq C_2$, $B \subseteq D_1 \subseteq D_2$の場合、$A \otimes B \subseteq C_1 \otimes D_1 \subseteq C_2 \otimes D_2$が与えられ、$F(A, B, C_1 \otimes D_1) \subseteq F(A, B, C_2 \otimes D_2)$であることが知られている([5])。ここではC, Dがともにinjectiveなら$F(A, B, C \otimes D)$がAとBの最大のフビニ積と考えられることを示す。また例として、Wassermannの最近の結果[9]を使って、ヒルベルト空間上のコンパクト作用素の作るC^*-環のフビニ積の1つの性質を調べる。

§1. フビニ積の最大性. M, NをW^*-環とし、M_*, N_*をそれらのpredualとする。$M \bar{\otimes} N$でMとNのW^*-テンソル積を表わす。$g \in M_*$に対し$\tilde{R}_g(m \otimes n) = \langle g, m \rangle n$をみたす$M \bar{\otimes} N$からNへの$\sigma$-弱連続線型写像を$\tilde{R}_g$で、また$h \in N_*$に対し、$\tilde{L}_h(m \otimes n) = \langle h, n \rangle m$をみたす$M \bar{\otimes} N$からMへの$\sigma$-弱連続線型写像を$\tilde{L}_h$で表わす。さらに、$M_1$, N_1をM, NのW^*-部分環とする。このときW^*-テンソル積の交換定理

($(M\bar{\otimes}N)' = M'\bar{\otimes}N'$)と同値な定理として知られる富山による次の結果がある(cf. [7])。

定理 1. $\{x \in M\bar{\otimes}N : \tilde{R}_g(x) \in N_1,\ \tilde{L}_h(x) \in M_1$ *for all* $g \in M_*$, $h \in N_*\} = M_1 \bar{\otimes} N_1$

C^*-環 C, D について、C^{**}, D^{**} を *enveloping* W^*-環とすると、$C \otimes D \subset C^{**} \bar{\otimes} D^{**}$ とみなせる。 さらに A, B を C, D の C^*-部分環とし、$C^{**} \bar{\otimes} D^{**}$ の部分環 $A \otimes B$ の弱閉包を $\bar{A} \bar{\otimes} \bar{B}$ で表わす。 このとき定理 1 を使って次の補題が証明される。

補題 2 ([7]). $F(A, B, C \otimes D) = (C \otimes D) \cap (\bar{A} \bar{\otimes} \bar{B})$.
したがって、$F(A, B, C \otimes D)$ は $C \otimes D$ の C^*-部分環である。

系 3 ([5]). 特に A, B が両側イデアルならば、$F(A, B, C \otimes D)$ も両側イデアルになる。

C^*-環 C から C^*-環 D への線型写像 φ について

$$\varphi(x^*x) \geq \varphi(x)^*\varphi(x) \qquad x \in C$$

を *Schwarz* の不等式と呼ぶ。 この不等式をみたす写像は *positive* である。 特に *completely positive* な写像(以下略

して，CP写像と呼ぶことにする）はSchwarzの不等式をみたす。つぎの補題は既知と思われる。

補題4．C^*－環CからC^*－環D上への線型写像φが逆写像ψをもち，φ，ψともSchwarzの不等式をみたすとき，φは$*$－同型写像となる。

証明．等式 $x^*y = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^n (y+i^n x)^*(y+i^n x)$ により，$\varphi(x^*x) = \varphi(x)^*\varphi(x)$ を示せば十分である。任意の$x \in C$について，$x=\psi(y)$となる$y\in D$をえらぶ。このとき，$\psi(y^*y) \geq \psi(y)^*\psi(y)$。等式 $\varphi(x^*) = y^*$ とこの不等式より，

$$\varphi(x)^*\varphi(x) = y^*y = \varphi(\psi(y^*y)) \geq \varphi(\psi(y)^*\psi(y)),$$

また，$\varphi(x^*x) = \varphi(\psi(y)^*\psi(y)) \geq \varphi(\psi(y))^*\varphi(\psi(y)) = \varphi(x)^*\varphi(x)$。
結局 $\varphi(x^*x) = \varphi(x)^*\varphi(x)$ が成立する。

単位元をもつC^*－環Cについて，任意のC^*－環DとそのC^*－部分環Bに対して，BからCへのcontractiveなCP写像がDからCへのcontractiveなCP写像に拡張できるときCをinjectiveと呼ぶ。C^*－環C_1，D_1に対し，$\widetilde{C}_1$，$\widetilde{D}_1$でC_1の$\mathbb{C}$による extension，D_1の$\mathbb{C}$による extension とする。このとき［3，Lemma 3.9］により，C_1からDへのcontractiveなCP写像は$\widetilde{C}_1$から$\widetilde{D}_1$へのcontractiveなCP写像に拡張できる。

よって上の定義による injectivity と [4, p.1106] の Choi-Effros の意味でのそれは一致する。 特にヒルベルト空間H上の有界作用素全体の作る C^*-環 L(H) は injective である [2]。

定理 5. C^*-環 A, B に対し, $A \subseteq C_1$, $A \subseteq C_2$, $B \subseteq D_1$, $B \subseteq D_2$ となる C^*-環 C_1, C_2, D_1, D_2 がすべて injective とする。このとき $F(A, B, C_1 \otimes D_1)$ から $F(A, B, C_2 \otimes D_2)$ 上の $\Phi(x) = x$, $x \in A \otimes B$ をみたす $*$-同型写像 Φ が存在する。

証明. injection : $A \longrightarrow A \subseteq C_2$ の C_1 から C_2 への contractive で completely positive な拡張を φ_1 とする。 このとき $\varphi_1(a) = a$, $a \in A$ が成立する。 同様に次の性質をもつ3つの contractive な CP 写像が存在する:

$\varphi_2 : C_2 \longrightarrow C_1$, $\varphi_2(a) = a$ $a \in A$.

$\psi_1 : D_1 \longrightarrow D_2$, $\psi_2 : D_2 \longrightarrow D_1$, $\psi_i(b) = b$ $(i = 1, 2,\ b \in B)$。

そこで, $\varphi_1 \otimes \psi_1$ を $\varphi_1 \otimes \psi_1(c \otimes d) = \varphi_1(c) \otimes \psi_1(d)$ をみたす $C_1 \otimes D_1$ から $C_2 \otimes D_2$ への CP 写像, 同様に $\varphi_2 \otimes \psi_2$ を $C_2 \otimes D_2$ から $C_1 \otimes D_1$ への CP 写像とする。

記号を簡単にするため, $F_i = F(A, B, C_i \otimes D_i)$ $(i = 1, 2)$ とおく。 任意に $x \in F_1$ を固定する。 このとき $g \in C_2^*$ に対し, $R_g(\varphi_1 \otimes \psi_1(x)) = \psi_1(R_{(g \circ \varphi_1)}(x)) \in B$, 同様に $h \in D_2^*$ に対し $L_h(\varphi_1 \otimes \psi_1(x)) \in A$。 よって $\varphi_1 \otimes \psi_1(F_1) \subseteq F_2$。

また，$g \in C_1^*$，$h \in D_1^*$ に対して

$$< g \otimes h,\ (\varphi_2 \otimes \psi_2) \circ (\varphi_1 \otimes \psi_1)(x) > = < g,\ (\varphi_2 \circ \varphi_1)(L_{(h \circ \psi_2 \circ \psi_1)}(x)) >$$

$$= < g,\ L_{(h \circ \psi_2 \circ \psi_1)}(x) > = < h,\ \psi_2 \circ \psi_1 (R_g(x)) >$$

$$= < h,\ R_g(x) > = < g \otimes h,\ x >。$$

ここで product functional の全体は separating family を作るから，$\varphi_2 \otimes \psi_2 \circ \varphi_1 \otimes \psi_1 (x) = x \quad x \in F_1$ が成立する。同様に $\varphi_2 \otimes \psi_2 (F_2) \subseteq F_1$ かつ $\varphi_1 \otimes \psi_1 \circ \varphi_2 \otimes \psi_2 (x) = x \quad x \in F_2$ であることが証明される。

ここで $\varphi_1 \otimes \psi_1$ の F_1 への制限を Φ とおく。補題2より F_1，F_2 は C^*-環で，Φ が F_1 から F_2 上の CP 写像で completely positive な逆写像をもつことが上のことによりわかる。よって補題4から Φ は $*$-同型である。また $\Phi(x) = x \quad x \in A \otimes B$ は容易に示せる。

A，B が W^*-環の場合はこの定理に類似することが[6]で証明されている。

定理5の互いに $*$-同型な A と B のフビニ積を $A \otimes_F B$ で表わすことにする。$A \subseteq C$，$B \subseteq D$ となる C^*-環 C，D について，$C \subseteq C_1$，$D \subseteq D_1$ となる injective C^*-環 C_1，D_1 をえらぶと，$F(A, B, C \otimes D) \subseteq F(A, B, C_1 \otimes D_1) = A \otimes_F B$ が成立する。よって $A \otimes_F B$ は A と B の最大なフビニ積と考えられる。

§2. コンパクト作用素の作るC*-環のフビニ積. ここではWassermann [9] の結果と記号を必要とする。可分な無限次元ヒルベルト空間Hを、$H=\oplus_{i=1}^{\infty}H_i$ と分解する。ただし、H_n は n-次元ヒルベルト空間を表わす。また $M=\oplus_{n=1}^{\infty}L(H_n)=\{(x_n): x_n\in L(H_n),\ \sup\|x_n\|<\infty\}$ とおく。自然数上の free-ultrafilter $\mathcal{U}$ を固定する。$L(H_n)$ 上の $tr_n(I_n)=1$ をみたすような trace を tr_n とし、$x=(x_n)$ について $Tr(x)=\lim_{\mathcal{U}} tr_n(x_n)$ によってM上の state を定義する。$L(H_n)$ と n 次の複素行列環は同型であるから、$x\in L(H_n)$ を $n\times n$ 行列とみなしその転置行列を対応させたものを $\tilde{x}$ で表わす。このとき $g(x\otimes y)=\lim_{\mathcal{U}} tr_n(x_n\tilde{y}_n)$ $x=(x_n), y=(y_n)\in M$ をみたす $M\otimes M$ 上の pure state g が存在する [cf. 8]。$M\otimes M\subseteq L(H)\otimes L(H)$ であるから g を $L(H)\otimes L(H)$ 上の pure state に拡張し、この pure state の定義する $L(H)\otimes L(H)$ のヒルベルト空間K上の既約表現を π と書く。π の $L(H)$ への2つの制限: $\pi_1(x)=\pi(x\otimes I)$, $\pi_2(x)=\pi(I\otimes x)$ $x\in L(H)$ は $\ker\pi_1=\ker\pi_2=LC(H)$ をみたす [9. Lemma 3]。

2つの生成元をもつ自由群 F_2 が residually finite [8. p.244] ということから F_2 はMの unitary 群の中へ表現される。そこでこの表現の像によって生成される C^*-部分環をCと書く。また Anderson の結果 [1] より、$Tr(p)\geq\frac{1}{2}$ でかつ

$x \in C$ で $\mathrm{Tr}(x^* x) = 0$ なら $px \in LC(H)$ となる射影 $p \in M$ をえらぶ。 そして C と p によって生成される M の C^*-部分環を $C^*(C, p)$ と書く。 これらの記号を使ってここで必要とする Wassermann の結果を述べる。

補題 6 ([9]). 次の性質をみたす単位元を保存する cp 写像 ρ_1, ρ_2 はどちらも存在しない。

$$\rho_1 : L(K) \to \pi_2(C^*(C, p))', \quad \rho_1(axb) = a\rho_1(x)b \quad a, b \in \pi_1(C^*(C, p))$$

$$\rho_2 : L(K) \to \pi_1(C^*(C, p))', \quad \rho_2(axb) = a\rho_2(x)b \quad a, b \in \pi_2(C^*(C, p)).$$

この補題をフビニ積を使っていいかえる.

補題 7. A, B を $C^*(C, p)$ を含む $L(H)$ の C^*-部分環とすると次の 2 つが成立する。

(1) $F(A \cap LC(H), B, A \otimes B) \nsubseteq \ker \pi$.

(2) $F(A, B \cap LC(H), A \otimes B) \nsubseteq \ker \pi$.

証明. (1). $F(A \cap LC(H), B, A \otimes B) \subseteq \ker \pi$ と仮定する。

$\pi_1 \circ L_h = L_h \circ \pi_1 \otimes I \quad h \in L(H)^*$ より $\{x \in A \otimes B : \pi_1 \otimes I(x) = 0\} = F(A \cap LC(H), B, A \otimes B)$。 よって $\tilde{\pi}$ は $\tilde{\pi}(\pi_1(a) \otimes b) = \pi(a \otimes b) \quad a \in A, b \in B$ をみたす $\pi_1(A) \otimes B$ の表現をきめる。 このとき [9, Lemma 1] によって $\rho_1(axb) = a\rho_1(x)b \quad a, b \in \pi_1(A)$ をみたす単位元を保

存するL(K)から$\pi_2(B)'$へのCP写像ρ_1が存在する。これは補題6に反する。よって(1)が示された。

(2)も(1)と対称的な証明によって得られる。

定理8. 可分な無限次元ヒルベルト空間Hに対し

$LC(H)\otimes_F LC(H) \supsetneq LC(H)\otimes LC(H)$ が成立する。

証明. $F(LC(H), LC(H), L(H)\otimes L(H)) \supsetneq LC(H)\otimes LC(H)$ を示す。記号を簡単にするため、L(H)のC^*-部分環A, Bについて$F(A, B) = F(A, B, L(H)\otimes L(H))$とおく。この節の初めに定義した表現$\pi$を使って補題7により

$$F(LC(H), L(H)) \nsubseteq \ker\pi, \qquad (1)$$

$$F(L(H), LC(H)) \nsubseteq \ker\pi。$$

系4より$F(L(H), LC(H))$は両側イデアルであるから既約表現πの$F(L(H), LC(H))$への制限も既約となる。したがって$\{u_\beta\}$を$F(L(H), LC(H))$の approximate identity とすると$s\text{-}\lim \pi(u_\beta) = I_K$。また系4より$F(LC(H), L(H))$も両側イデアルで$x\in F(LC(H), L(H))$とすると

$$u_\beta x \in F(LC(H), LC(H)) \cap F(L(H), LC(H)) = F(LC(H), LC(H))。$$

ここで$F(LC(H), LC(H)) \subseteq \ker\pi$と仮定する。

$$\pi(x) = \lim \pi(u_\beta x) = 0 。$$

したがって$F(LC(H), L(H)) \subseteq \ker\pi$となり(1)に反する。

結局 $F(LC(H), LC(H)) \supsetneqq \ker(\pi \mid F(LC(H), LC(H))) \supseteq LC(H) \otimes LC(H)$ 。

References

1. J. Anderson, A C^*-algebra A for which Ext(A) is not a group, Ann. of Math., 107 (1978), 455 - 458.
2. W. B. Arveson, Subalgebras of C^*-algebras, Acta Math., 123 (1969), 141 - 224.
3. M. D. Choi and E. G. Effros, The completely positive lifting problem for C^*-algebras, Ann. of Math., 104 (1976), 585 - 609.
4. ________________, Lifting problems and the cohomology of C^*-algebras, Can. J. Math., 29 (1977), 1092 - 1111.
5. J. Tomiyama, Tensor products and approximation problems of C^*-algebras, Publ. Res. Institute Math. Sci. Kyoto Univ., 11 (1975), 163 - 183.
6. ____________, On the Fubini product of von Neumann algebras, Bull. of Yamagata Univ., Nat. Sci., 9 (1976), 53 - 56.
7. ____________, Some aspects of the commutation theorem

for tensor products of operator algebras, Proc. on the colloquium "Algebras of operators and their applications to mathmatical physics", Marseille, 1977.

8. ___________, On tensor products of certain groups C^*-algebras, J. Functional Analysis, 23 (1976), 239 - 254.

9. ___________, A pathology in the ideal space of $L(H) \otimes L(H)$, Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), 1011 - 1020.