数理解析研究所講究録
第 362 巻 1979 年 114-123



# 正規イデアルの precipitousness を保持する Cohen 拡大の一条件について.

神大 教養　角田 譲

1. 問題の提起. $M$ を ZFC の推移的模型, $s \in M$ で, $s \neq \phi$ とする。$s$ 上の $M$-ultrafilter とは次のもの $\mathcal{U}$ を意味する.

i) $\mathcal{U} \subseteq P(s) \cap M$,

ii) $A \in \mathcal{U} \wedge A \subseteq B \in P(s) \cap M \longrightarrow B \in \mathcal{U}$,

iii) $A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U} \longrightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$

iv) $A \in P(s) \cap M \longrightarrow A \in \mathcal{U} \vee s - A \in \mathcal{U}$

v) $\mathcal{U} \neq P(s) \cap M$.

$\mathcal{U}$ が必ずしも $M$ に属するという事はない事に注意されたい。

${}^{s}M \cap M = \{f;\ f: s \to M \wedge f \in M\}$ に対して次の様に同値関係を定義する.

$$f \sim g \iff \{x \in s;\ f(x) = g(x)\} \in \mathcal{U}.$$

${}^{s}M \cap M/\sim$ に対して二項関係 $E$ を次の様に定義する.

$$[f] E [g] \iff \{x \in s;\ f(x) \in g(x)\} \in \mathcal{U}.$$

よって, 構造 $\mathfrak{Ult}_{\mathcal{U}}(M) = \langle {}^{s}M \cap M/\sim;\ E \rangle$ が定義される.

通常のultrapowerの様にŁośの定理が成立する。

さて、$V$をthe ground model、$P$を$V$の中のpartially ordered setとする。$s$を$V$のnon-empty set、$G$を$P$に関するgeneric filter over $V$とする。さらに、$W$を$s$上の$V[G]$-ultrafilterとする。その時、$W' = \{A \in P(s) \cap V : A \in W\}$は、明らかに、$s$上の$V$-ultrafilterとなる。ゆえに、$\langle M : E\rangle = \mathrm{Ult}_{W'}(V)$が構成される。$j : \langle V : \in\rangle \to \langle M : E\rangle$を標準的なelementary embeddingとすると、$j(P)$は$\langle M : E\rangle$の中におけるp.o. setである。次に、$\mathrm{Ult}_W(V[G])$を考える。その時、それは、$\langle M_W[H] : E_W\rangle$なる形になっているであろう。そこで我々は次の一般的な形の問題を考える事にする。$\langle M : E\rangle$と$\langle M_W : E_W\rangle$に、標準的なisomorphismが存在し、そのisomorphismによる$H$のimageが丁度、$j(P)$-generic over $M$となり、$\mathrm{Ult}_W(V[G])$と$\langle M[H'] : E\rangle$が同型となる（但し、ここでの$H'$はisomorphismによる$H$の像）。即ち、

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Ult}_W(V[G]) \cong \langle M[H'] : E\rangle & \\
V[G] \arrow[urr, "\text{ultrapower extension}"] & & & \\
 & & \mathrm{Ult}_{W'}(V) = \langle M : E\rangle \arrow[uu, "\text{generic extension}"'] & \\
 & V \arrow[ul, "\text{generic extension}"] \arrow[ur, "\text{ultrapower extension}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

があるだけで可換となる事。

我々は、上の問題が肯定的である一つの条件について考え、その応用を述べる事にする。

2. Generic ultrapower. 今$S$を non-empty set，$I$を$S$上の ideal とする．$R_I$として．$\{A\subseteq S;\ A\notin I\}$なる集合を意味し．$R_I$を set of forcing conditions と考える時には．$A, B$ $R_I$にある場合．$A\subseteq B$にもって．$A$の情報の方が．$B$の情報よりも多くの情報をもっているものとする．

さて，$V$を the ground model として，$W_I$を $R_I$-generic over $V$とする．その時．次の補題が成立する．

補題1. $W_I$は，$S$上の $V$-ultrafilterで，$I$の dual filter を含む．

次に，$I$を，regular uncountable cardinal $\kappa$上の，non-principal $\kappa$-complete ideal on $\kappa$とする．その時，次が成立する．

補題2. $W_I$は，$\kappa$上の $V$-$\kappa$-complete non-principal $V$-ultrafilter となる．

ここで，$V$-$\kappa$-complete とは．次の条件が成立している事をいう：

$$\langle A_\xi\ ;\ \xi<\zeta\rangle\in V,\ \zeta<\kappa,\ (\forall\xi<\zeta)\ A_\xi\in W_I\ \Longrightarrow\ \bigcap_{\xi<\zeta}A_\xi\in W_I.$$

さらに，$I$が，$\kappa$上の normal ideal であれば．

補題3. $W_I$は $V$-normal となる．

ここで、$\mathcal{W}_I$ が $V$-normal であるとは：

$$f \in V,\quad f:\kappa \to \kappa,\quad (\forall \xi<\kappa)(f(\xi)<\xi)$$

$$\Rightarrow (\exists \zeta<\kappa)\ \{\xi<\kappa : f(\xi)=\zeta\} \in \mathcal{W}_I .$$

補題2，補題3 より，次の事が簡単にいえる

補題4. i) $I$ が $\kappa$上の non-principal $\kappa$-complete ideal であれば，$Ult_{\mathcal{W}_I}(V)$ は，order type $\kappa$ の $Ord^{(Ult_{\mathcal{W}_I}(V))}$ の initial segment をもつ.

ii) $I$ が normal であれば，$[id_\kappa]$ は $Ult_{\mathcal{W}_I}(V)$ の $\kappa$-th ordinal となる.

3. 問題の一つの条件. $\kappa$ を regular uncountable cardinal, $I$ を $\kappa$上の normal ideal, $P$ を $\kappa$-chain condition を満たす p.o. set とする. $J$ を $P$ に関する Chen extension $V[G]$ の中での $I$ によって生成される ideal とする. $J$ が $V[G]$ において $\kappa$上の normal ideal となる事は，$P$ が $\kappa$-chain condition を満たす事より判る.

補題1. $\mathcal{W}$ を $V[G]$ の $R_J$-generic filter とする. その時，$\mathcal{W}_I=\{A\in P(\kappa)\cap V ; A\in \mathcal{W}\}$ は，$V$上の $R_I$-generic filter となる.

(証明). $\mathcal{W}_I$ が，$\kappa$上の $V$-ultrafilter となる事は明らかである. $\mathcal{W}_I$ が $I$ の dual filter を含む事も明白である. $\mathcal{A}\in V$ を，$I$-分割とする. ―即ち― $R_I$ の部分集合で次の事を満たす

極大集合である： $X, Y \in \mathcal{X}, X \neq Y \Rightarrow X \cap Y \in I$.

$\mathcal{X}$ が, $J$-分割である事を示す. $A \notin J$ とする. $p_0 \in G$ を $p_0 \Vdash \dot{A} \notin \dot{J}$ であるように選ぶ. $Y = \{p \in P$ : $p$ と $p_0$ は, incompatible, 又は, $p \le p_0$ で $p \Vdash X \cap \dot{A} \notin \dot{J}$ なる $X \in \mathcal{X}$ が存在する$\}$ とおく. $Y$ が $P$ で dense である事をいう. $p \in P$ とせよ. $p$ と $p_0$ は compatible としてよい. $p_1 \in P$ を $p_1 \le p$, $p_1 \le p_0$ とする. $p_1 \Vdash \dot{A} \notin \dot{J}$ であるので, $B = \{\alpha < \kappa : p_1 \nVdash \alpha \notin \dot{A}\} \notin I$. しかるに, $\mathcal{X}$ が $I$-partition である事より, $X \in \mathcal{X}$, $B \cap X \notin I$ なる $X$ が存在する. 今 $p_1 \Vdash \dot{A} \cap X \in \dot{J}$ とする. $P$ が $\kappa$-chain condition を満たす事より, $\kappa - D \in I$, $p_1 \Vdash \dot{A} \cap X \cap D = \emptyset$ なる $D$ が存在する. $B \cap X \notin I$ であるので $D \cap B \cap X \neq \emptyset$. $\alpha \in D \cap B \cap X$ とする. $\alpha \in D \cap X$ であるので $p_1 \Vdash \alpha \notin A$, $\alpha \in B$ であるので, $p_1 \nVdash \alpha \notin \dot{A}$. これは矛盾である. よって, $p_1 \nVdash \dot{A} \cap X \notin \dot{J}$. それゆえ, $p_2 \Vdash \dot{A} \cap X \notin \dot{J}$ なる $p_2 \le p_1$ が存在する. よって, $Y$ が $P$ で dense である事がいえた. $p \in G \cap Y$ とする. $p_0 \in G$, ($p$ と $p_0$ は compatible であるので). よって, $p \le p_0$ で $p \Vdash X \cap \dot{A} \notin \dot{J}$ なる $X \in \mathcal{X}$ が存在する. よって, ある $X \in \mathcal{X}$ に対して $X \cap A \notin J$. 即ち $\mathcal{X}$ は $J$-partition である. $W$ が $R_J$-generic であるので, $X \in W \cap \mathcal{X}$ なる $X$ が存在する. それで $X \in W_I \cap \mathcal{X}$. $W_I$ は $V$ 上の $R_I$-generic filter である.

$j: \langle V : \in\rangle \to \langle M : E\rangle = Ult_{W_2}(V)$ を canonical elementary embedding とする. $H \subseteq ext(j(P))$ を, 次の様に定義する ($ext(j(P)) = \{x \in M ; x E j(P)\}$):

$[\langle q_\alpha ; \alpha < \kappa\rangle] \in ext(j(P))$ とする. その時,

$$[\langle q_\alpha ; \alpha<\kappa\rangle] \in H \text{ iff } \{\alpha<\kappa ; q_\alpha \in G\} \in W.$$

補題2. $K$は, $j(P)$-generic over $\langle M : E\rangle$.

(証明). 次の i), ii), iii) を証明すれば良い. i)と ii) は明らかである. iii)を示す為に, $X \in M$ を $\langle M:E\rangle \models$ "$X$ は $j(P)$ の dense subset" とする. $\langle X_\alpha ; \alpha<\kappa\rangle \in V$ を $X = [\langle X_\alpha ; \alpha<\kappa\rangle]$, $X_\alpha$ は, $P$の dense subset, $\alpha<\kappa$ であるように選ぶ.

$\mathscr{X} = \{A \notin J ; (\exists \langle q_\alpha ; \alpha<\kappa\rangle \in V)(q_\alpha \in X_\alpha, \forall\alpha<\kappa, A \subseteq \{\alpha<\kappa ; q_\alpha \in G\})\}$ と, $V[G]$の中で定義する. $\mathscr{X}$ が, $R_J$ で dense である事を証明する. $A \in P(\kappa) \cap V[G]$, $A \notin J$ とする. $p_0 \in G$ を $p_0 \Vdash \dot{A} \notin \dot{J}$ と選ぶ.

$Y = \{p \in P ; p$ と $p_0$ は, incompatible, 或は, $p \leq p_0$ で $(\exists \langle q_\alpha ; \alpha<\kappa\rangle)(q_\alpha \in X_\alpha, \forall\alpha<\kappa, p \Vdash \{\alpha<\kappa : q_\alpha \in \dot{G}\} \cap \dot{A} \notin \dot{J})\}$

明らかに, $Y \in V$ である. $Y$ が $P$で dense である事を示そう. $p \in P$ とする. $p$と$p_0$は compatible として良い. $p_1 \in P$ を $p_1 \leq p$, $p_1 \leq p_0$ とする. $p_1 \Vdash \dot{A} \notin J$ であるので,

$B = \{\alpha<\kappa : p_1 \nVdash \alpha \notin \dot{A}\} \notin I$ である.

その時，$\langle q_\alpha : \alpha<\kappa \rangle$ を次の条件を満たす様に選ぶ事ができる

(a) $q_\alpha \leq p_1$, $\alpha<\kappa$.

(b) $q_\alpha \in X_\alpha$, $\alpha<\kappa$.

(c) $q_\alpha \Vdash \alpha \in \check{A}$, $\alpha \in B$.

$p_1 \Vdash \{\alpha<\kappa ; q_\alpha \in \dot{G}\} \cap \check{A} \in \check{J}$ とする．$P$ が $\kappa$-chain condition を満たしている事より $p_1 \Vdash \{\alpha<\kappa : q_\alpha \in \dot{G}\} \cap \check{A} \cap \check{D} = \phi$ なる $\kappa - D \in I$ が存在する．$B \notin I$ であるので，$B \cap D \neq \phi$. $\alpha \in B \cap D$ とせよ．(c)により $q_\alpha \Vdash \alpha \in \check{D} \cap \check{A}$. (a)により $q_\alpha \Vdash \{\alpha<\kappa ; q_\alpha \in \dot{G}\} \cap \check{A} \cap \check{D} = \phi$. その事より $q_\alpha \Vdash q_\alpha \notin \dot{G}$. これは矛盾である．よって，$p_2 \leq p_1$, $p_2 \Vdash \{\alpha<\kappa ; q_\alpha \in \dot{G}\} \cap \check{A} \notin \check{J}$ なる $p_2$ が存在する．その時，$p_2 \in Y$, $p_2 \leq p$. よって，$Y$ は $P$ で dense である．$p \in Y \cap G$ とする．$p_0 \in G$ であるので，$p_0$ と $p$ は compatible である．それ故，$(\forall \alpha<\kappa)(q_\alpha \in X)$, $C = \{\alpha<\kappa ; q_\alpha \in G\} \cap A \notin J$ なる $\langle q_\alpha : \alpha<\kappa \rangle$ が存在する．その時，$C \in \mathscr{X}$, $C \subseteq A$. よって，$\mathscr{X}$ は $R_J$ で dense である．$W$ が $R_J$-generic over $V[G]$ である事より $\mathscr{X} \cap W \neq \phi$. $A \in W \cap \mathscr{X}$ とする．$(\forall \alpha<\kappa)(q_\alpha \in X_\alpha)$, $A \subseteq \{\alpha<\kappa ; q_\alpha \in G\}$ なる $\langle q_\alpha : \alpha<\kappa \rangle \in V$ が存在する．その事より，$\{\alpha<\kappa : q_\alpha \in G\} \in W$, 即ち，$q = [\langle q_\alpha : \alpha<\kappa \rangle] \in H$, $q \in ext(X)$. よって $H$ は $j(P)$-generic over $\langle M : E \rangle$ である

$\langle M[H]; E\rangle$ を $\langle M: E\rangle$ の generic extension とする. elementary embedding $\tilde{j}: \langle V[G]; E\rangle \to \langle M[H]: E\rangle$ を次の様に定義する. $x \in V[G]$ とする. $\dot{x}$ を $i_G^V(\dot{x}) = x$ なる term とする. $\tilde{j}(x) = i_H^M(j(\dot{x}))$ とする. $p \in G \Leftrightarrow j(p) \in H$, $p \in P$ である事を考えれば, $\tilde{j}$ が well-defined である事が判る. 同様の事実により, $\tilde{j}$ は $j$ の拡張で elementary embedding となる.

補題3. $W = \{A \in P(\kappa) \cap V[G] : \langle M[H]: E\rangle \models \kappa_M \in \tilde{j}(A)\}$.

$i_W: (V[G]; \in) \to Ult_W(V[G])$ を canonical embedding とする. $k: Ult_W(V[G]) \to \langle M[H]: E\rangle$ を次の様に定義する: $[f]_W \in Ult_W(V[G])$. $k([f]_W) = \tilde{j}(f)(\kappa)$. 補題3を使用して次の事を証明できる.

補題4. $k$ は同型である

$$\begin{tikzcd} & Ult_W(V[G]) \arrow[d, "k"] \\ V[G] \arrow[ur, "i_W"] \arrow[r, "\tilde{j}"] & M[H] \\ V \arrow[u, "\cup\!\!|"] & M \arrow[u, "\cup\!\!|"'] \end{tikzcd}$$

ゆえに我々は §1で提起した問題に解答を与える一条件を、得た事になる。

## 4. 応用

3で得た結果より、次の定理が得られる。

**定理1.** $\kappa$をregular uncountable cardinal, $I$をnormal ideal on $\kappa$とする。$\mathcal{P}$を$\kappa$-chain conditionを満足するp.o.setとする。$I$がprecipitousになるための、必要十分条件は、"$\Vdash$ $\dot{I}$で生成された$\kappa$上のidealがprecipitous"である。

($I$がprecipitousであるとは、$Ult_{W_I}(V)$がwell-foundedである事である)。

証明は前節の補題4より明らかである。

**定理2.** $\kappa$をregular uncountable cardinal, $T$を$\kappa$上の$\kappa$-saturated normal idealとする。その時、

$\kappa$上のthin setsがprecipitousであるための必要十分条件は、$\{\alpha<\kappa;\ \alpha$上のthin setsのidealがprecipitous$\}$がT-measure oneを持つ事である。

## 参考文献.


[1]. T. Jech and K. Prikry, Ideal of sets and the power set operation, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 593-595.

[2] T. Jech, M. Magidor, W. Mitchell and K. Prikry. Precipitous ideals, to appear.

[3]. Y. Kakuda. On a condition for Cohen extensions which preserve precipitous ideals.