

Paris-Harrington の結果について

豊田高寿 大浜茂生

PA を 1 階の Peano arithmetic であるとする。Ramsey 定理の有限形の一変した変形 (H) が  $N$  では真になるが、PA では証明できないという結果が

[1] Paris-Harrington: A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic. - Handbook of Mathematical Logic - に示されている。一方 Ramsey 定理の有限形 (R) は PA で証明可能であるということが知られている。ここでは (H) と (R) のちがいに焦点をあて [1] を紹介する。§1 で (R) の証明が PA で実行できることを示し、§2 で [1] における PA ⊢ (H) の証明の粗筋をとる。§3 で、PA における独立性についてより一般的結果が述べられている。

[2] Paris: Some Independence Results for Peano Arithmetic JSL, vol. 43, 1978.  
について示れる。

§1

定義

$$[X]^n = \{x \in X \mid \bar{x} = n\}$$

$$M \rightarrow (k)_r^e : \forall P: [M]^e \rightarrow r \exists H \subseteq M P([H]^e) = \text{一定}, \bar{H} \geq k.$$

このとき  $H$  は  $P$  に対して均質 (homogeneous) とよばれる。

$$M \xrightarrow{*} (k)_r^e : \forall P: [M]^e \rightarrow r \exists H \subseteq M P([H]^e) = \text{一定}, \bar{H} \geq \max(k, \min(H)).$$

$\bar{H} \geq \min(H)$  なる  $H$  は *relatively large* とよばれる。

$$(H) : \forall e, k, r \exists M (M \xrightarrow{*} (k)_r^e).$$

$$(R) : \forall e, k, r \exists M (M \rightarrow (k)_r^e).$$

$\Sigma F$  に無限公理のかわりにその否定をつけ加えてできる体系は自然数に関しては  $PA$  と同等であることが知られているので、以下の議論にはこれを使う。

定理

$$PA \vdash (R).$$

証明

$r=2$  とき示せば十分である。なぜなら  $r>2$  のときは帰納法で容易に示されるから。そこで  $r=2$  として  $e$  に関する帰納法で証明する。次の式が成り立つことは明らかである：

$$M \rightarrow (k)_2^e \Rightarrow \forall \bar{K} \geq M (K \rightarrow (k)_2^e).$$

$$\text{又 } g(k) = \mu m (\forall K (\bar{K} \geq m \Rightarrow (K \rightarrow (k)_2^e)))$$

とおけば、この定義より

$$\forall M: \bar{M} \cong g(k), [M]^e = M_0 \cup M_1, M_0 \cap M_1 = \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists Z \subseteq M, \bar{Z} \cong k, [Z]^e \subseteq M_0 \text{ 又は } [Z]^e \subseteq M_1$$

が成り立つことも容易にわかる。さて、

$$f(0) = e, f(n+1) = g(f(n)) + 1$$

とおき、 $M \cong f(2k-1)$  なる  $M$  をとる。この  $M$  について

$$(1) \quad M \rightarrow (k)_2^{e+1}$$

が成り立つ。(1) を証明すれば定理が示されたことになる。

(1) の証明。

$$[M]^{e+1} = M_0 \cup M_1, (M_0 \cap M_1 = \emptyset)$$

なるから  $\sqrt[n]{}$  分割を考える。各  $x \in M$  と  $i=1, 2$  に対して

$$M_i(x) = \{y \in [M]^e \mid y \cup \{x\} \in M_i\}$$

とおくと、

$$[M - \{x\}]^e = M_0(x) \cup M_1(x), M_0(x) \cap M_1(x) = \emptyset$$

が成り立つ。

さて、 $Z_0 = M, H_0^0 = H_0^1 = \emptyset$  とおき  $2k-2$  段階まで進む：

$m$  段階 ( $m \leq 2k-2$ )

$$x_m = \min Z_m \text{ とおく。}$$

$$\bar{Z}_m \cong f(2k-m-1) = g(f(2k-1-m-1)) + 1$$

$$\text{とすれば, } \overline{Z_m - \{x_m\}} \cong g(f(2k-m-2)),$$

$$\text{又 } [Z_m - \{x_m\}]^e \subseteq M_0(x_m) \cup M_1(x_m)$$

となるので帰納法の仮定より。

(i)  $\exists Y \subseteq Z_m - \{x_m\}$ ,  $\overline{Y} \geq f(2k-m-2)$ ,  $[Y]^e \subseteq M_0(x_m)$

のとき,  $Z_{m+1} = Y$ ,  $H_{m+1}^0 = H_m^0 \cup \{x_m\}$ ,  $H_{m+1}^1 = H_m^1$   
とおく。

(ii)  $\exists Y \subseteq Z_m - \{x_m\}$ ,  $\overline{Y} \geq f(2k-m-2)$ ,  $[Y]^e \subseteq M_1(x_m)$

のとき,  $Z_{m+1} = Y$ ,  $H_{m+1}^0 = H_m^0$ ,  $H_{m+1}^1 = H_m^1 \cup \{x_m\}$   
とおく。

$H_{2k-1}^i \geq k$  ( $i=0,1$ ) なる  $i$  に対して,  $H = H_{2k-1}^i$  とおく。

$[H]^{e+1} \subseteq M_i$  がいえる。何故ならば  $\rho \geq \tau$  なる

$\{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_e}\} \in [H]^{e+1}$  ( $i_0 < i_1 < \dots < i_e$ ) に対し

$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_e}\} \in [Z_{i_0+1}] \subseteq M_i(x_0)$  が成り立つ。

この証明からは  $\overline{H} \geq \min H$  はいえない。  $NF(H)$  は ZFCの中で Ramsey定理の無限形を使って証明できる。証明は [1]にある。こゝでは省略する。

§2 [1]における PAH (H) の証明の概略の次のようである。PAの言語に無限個の constant symbols  $c_0, c_1, \dots$  を加えた言語で表現される理論 T を考える。Tの公理は次のものである。

(i)  $+$ ,  $\times$ ,  $<$  に関する PAの公理, limited formulas に関する帰納法。

(ii)  $(c_i)^2 < c_{i+1}$  ( $i=0,1,\dots$ )

(iii)  $i, k$  等  $\omega$  の元の有限列 (小さい順に並べたもの) を

表し,  $c(c_i) = c_{i_1}, \dots, c_{i_r}$  とする。かつ  $r \neq i < k, k'$ , かつ  $r$  は limited formula  $\psi(y, z)$  に対して,

$$\forall y < c_i [\psi(y; c(k)) \leftrightarrow \psi(y; c(k'))].$$

次の命題を (A) で表わすことにする。

$$(A) \quad \forall e, k, r \in M \quad \forall \xi \in P_\xi; \xi < 2^M > P_\xi: [M]^e \rightarrow r \\ \exists X: \bar{X} \geq k$$

$$(i) \quad a, b \in X, a < b \Rightarrow a^2 < b$$

$$(ii) \quad a \in X, \xi \in 2^a \Rightarrow X - (a+1) \text{ は } P_\xi \text{ に対し均質.}$$

以上の準備のもとに,

$$(H) \Rightarrow (A) \Rightarrow \text{con}(T) \Rightarrow \text{con}(PA)$$

が PA の中で実行されることが示されている。(H) を本質に必要とするのは (H)  $\Rightarrow$  (A) の証明である。ここではこの証明のみに注目し、他は省略する。

補題 1.  $P_i: [M]^{e_i} \rightarrow r_i$  ( $i < n$ ) なる分割が与えられたとき  $e = \max_i e_i$ ,  $r = \prod_i \max(r_i, 7)$  とすれば, ある分割  $P$  が存在して  $P: [M]^e \rightarrow r$ , すべての  $H \subseteq M, \bar{H} > e$  に対して  $H$  は  $P$  に対して均質  $\Leftrightarrow H$  はすべての  $P_i$  に対して均質.

(証略)

$e, r$  は  $M$  によらないで定まることに注意。

$$f_0(x) = x+2, \quad f_{m+1}(x) = f_m^x(2) \text{ とおく。 } f_2(x) \geq 2^x, \\ f_3(x) \geq 1 \text{ かつ } x = 2^{\frac{x-2}{2}} \text{ なることがわかる。}$$

補題 2 かつてな  $m$  に対してある分割  $R$  が存在して

$R: [M]^2 \rightarrow \gamma$  ( $\gamma$  は  $m$  のみによる) 次の条件をみたす。

$X \subseteq M$  が relatively large かつ  $R$  に対して均質 (r. l. h. と略す)

かつ  $\bar{X} > 2 \Rightarrow [\forall x, y \in X, x < y \Rightarrow f_m(x) < y]$ .

証明  $Q(x) = \min(x, p)$  とおけば,  $Q: [M]^1 \rightarrow p+1$  となり, このとき  $\bar{X} > 2$  が  $Q$  に対して均質なら  $\min X \geq p$  である。

この  $Q$  に対して  $t < 1$  に  $p = f_m(3)$  とおく。

$$P_i(x, y) = \begin{cases} 0 & (f_i(x) < y \text{ のとき}) \\ 1 & (\text{その他のとき}) \end{cases} \quad i \leq m.$$

とおき, 補題 1 により  $Q, P_0, P_1, \dots, P_m$  を一つまとめると

$R: [M]^2 \rightarrow \gamma$  ( $\gamma$  は  $M$  によらない)

となる。これが求める  $R$  である。これを帰納法で示す。

$X$  をかつてな r. l. h. for  $R$  とし,  $\bar{X} = n, a = \min X,$

$b = \max X$  とおく。  $f_m(3) = p \leq a$  より  $m > i$  なるすべての  $i$  に対して,  $f_i^2(2) < f_i^3(2) = f_{i+1}(3) \leq f_m(3) \leq a$ .

又  $a = \min X \leq \bar{X} = n$  より,  $a-2 \leq n-2$ . よって,

$$f_{i+1}(a) = f_i^a(2) = f_i^{a-2}(f_i^2(2)) < f_i^{a-2}(a) \leq f_i^{n-2}(a) < b. \quad \text{一方 } X \text{ は}$$

$R$  に対して均質であるから  $\forall x, y \in X, x < y \Rightarrow f_{i+1}(x) < y$ .

補題 3  $P: [M]^e \rightarrow \delta$  ( $e \geq 2$ ) と  $m$  が与えられたとき  
次の条件をみたす  $P^*: [M]^e \rightarrow \delta'$  ( $\delta'$  は  $m, e, \delta$  のみによる)  
が存在する。

$Y \subseteq M$  n. l. h. for  $P^*$ ,  $\bar{Y} > e$

$\Rightarrow \exists X \subseteq M$   $X$ は $P$ に対して均質かつ  $\bar{X} \geq \max(e+1, f_m(\min X))$ .

証明  $h(a) = \max\{x \mid f_m(x) \leq a\}$  とおき

$$S(\{a_1, \dots, a_n\}) = \begin{cases} P(\{h a_1, \dots, h a_n\}) & (i \neq j \text{ なら } h a_i \neq h a_j \text{ のとき}) \\ \emptyset & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

とおく。  $R$  を補題2におけるのと同じものとする。  $R$  と  $S$  を補題1によって1つにまとめてできたものを  $P^*: [M]^e \rightarrow \mathcal{A}'$  とする。  $Y \subseteq M$ , n. l. h. for  $P^*$ ,  $\bar{Y} > e$  なるから  $Y$  に対し  $X = h(Y)$  とする。  $R$  の性質より  $\forall x, y \in Y$   $x < y$  ならば  $f_m(x) < y$  であるから  $h$  は1対1, よって  $\bar{X} = \bar{Y} \geq \min(Y)$ .  $h$  の定義より  $f_m(\min X) \leq \min Y \leq \bar{X}$ , 又  $Y$  は  $S$  に対して均質であるから  $X$  は  $P$  に関して均質になる。

(H)  $\Rightarrow$  (A) の証明

$e, k, r$  がかって与えられたとき,  $M$  を求める。  $e' = 2e + 1$  とし,  $Z$  を固定しておく。  $S: [Z]^{e'} \rightarrow 2$ ,  $Q: [Z]^1 \rightarrow P$  (補題2の証明における  $Q$  で,  $P$  は  $e(r+2) < f_3(P)$ ,  $k < P$  をみたすもの)  $R: [Z]^2 \rightarrow \mathcal{A}$  (補題2における  $R$  で,  $m=2$  としたもの,  $=$  のとき  $\mathcal{A}$  は  $Z$  にはよらない) とし, 補題1を使い  $Q, R, S$  を1つにまとめたものを  $P: [Z]^{e'} \rightarrow \mathcal{A}$  とする。  $\mathcal{A}$  は  $2, \mathcal{A}, \mathcal{A}$  のみで決定され  $Z$  にはよらない。 この  $P$  に  $m=3$  とし補題3を

適用してできる分割を  $P^*: [Z]^{e'} \rightarrow \mathcal{A}'$  とする。  $\mathcal{A}'$  は  $e', \mathcal{A}$  のみにより  $Z$  によらない。(H)より,  $M \xrightarrow{*} (e'+1)_{\mathcal{A}'}$  なる  $M$  が存在する。  $P_{\xi}: [M]^e \rightarrow \mathcal{Y}$  ( $\xi < 2^M$ ) がかつてに与えられたとき,  $S: [M]^{e'} \rightarrow 2$  を次のように定める:

$$S(a, b, c) = \begin{cases} 0 & (\text{すべての } \xi < 2^a \text{ に対し } P_{\xi}(b) = P_{\xi}(c)) \\ 1 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

$Q, \mathcal{A}, \mathcal{A}'$  は  $Z$  に関係なく定まるから  $M$  について  $Q, R, P, P^*$  を上と同様に定めることができる。  $M \xrightarrow{*} (e'+1)_{\mathcal{A}'}$  であるから,  $P^*: [M]^{e'} \rightarrow \mathcal{A}'$  に対し,  $r, l, h, \gamma$  が存在する。補題3より, ある  $X \subseteq M$  が存在して,  $X$  は  $P$  に対し均質,  $\bar{X} \geq \max(e'+1, f_3(\min X))$  となる。補題1より,  $X$  は  $Q, R, S$  に対し均質となる。  $X$  が  $R$  に対して均質なることは  $f_2(x) \geq x^2$  より

$$(i) \quad x, y \in X, \quad x < y \Rightarrow x^2 < y.$$

$X$  は  $Q$  に対して均質であるから,  $a = \min X$  とすれば  $p \leq a$  より  $e(r^{(2^a)} + 2) \leq f_3(a)$ ,  $e(r^{(2^a)} + 1) < \overline{\overline{X - (a+1)}}$ .

$X - (a+1)$  の元を小さい方から順に  $e$  個ずつ重複を許さず並べたものを  $b_0, b_1, \dots, b_l$  とすると  $r^{(2^a)} < l$  であり, 又  $b_i$  を1つ定めることに列  $\langle P_0(b_i), \dots, P_{\xi}(b_i), \dots, P_{2^a-1}(b_i) \rangle$  が定まり, この列の総数は  $r^{(2^a)}$  個であるので, ある  $b_i, b_j$  ( $i \neq j$ ) が存在して, すべての  $\xi < 2^a$  に対して  $P_{\xi}(b_i) = P_{\xi}(b_j)$  となる。ゆえに  $S(a, b_i, b_j) = 0$ .  $X$  の最後の  $e$  個を  $C$  とし,  $X' = X - C$

とすれば、 $X$  は  $S$  に対して均質なので、かつてな  $b \in X'$ ,  
 $b \in [X']^e$  に対して  $S(b, b, c) = 0$  がいえる。  $X'$  を改めて  $X$   
 と思うことによつて

(ii) かつてな  $a \in X$ ,  $\xi < 2^a$  に対して,  $X - (a+1)$  は  $P_\xi$  に対し  
 て均質。

以上の証明より結局 *relatively large* ( $\min H \leq \bar{H}$ ) を仮定す  
 ることは (補題3より)  $\min H$  に比べ  $\bar{H}$  を十分大きくするこ  
 とができることの保障を与えることであり、これが (A) の (ii)  
 を示すのに重要な役割を果たしたのである。

§3.  $PA$  の *countable nonstandard model* に対し, *indicator*  
 なるものを定義し, ある種の *indicator* が  $PA$  で独立であるこ  
 と及び (H) は この種の *indicator* であることが示される。

$M$  を  $PA$  の *countable nonstandard model* とする。  $I (\subseteq M)$  が  
 $M$  の *initial segment* とは (i)  $2 \in I$ , (ii)  $a, b \in I \Rightarrow a \cdot b \in I$ ,  
 (iii)  $a \in I, b \in M, b < a \Rightarrow b \in I$  なるときいひ,  $I \subseteq_e M$  で表  
 わす。

$\gamma: M^2 \rightarrow M$  が  $M$  で *definable* のとき, 次の条件をみたせば  
 $\gamma$  は *indicator* であるといわれる:

$$a, b \in M; \quad \gamma(a, b) > N \iff \exists I \subseteq_e M \ a \in I < b \ I \models PA.$$

以下次の性質をもつ indicators を考える。

$$(i) \quad Y(x, y) = z \quad : \quad \Sigma_1,$$

$$(ii) \quad PA \vdash \forall x, y \exists! z \quad Y(x, y) = z,$$

$$(iii) \quad J: \text{countable}, J \models PA \Rightarrow Y^J = \{ \langle a, b, c \rangle \in J^3 \mid J \models Y(a, b) = c \}$$

indicator in  $J$ ,

$$(iv) \quad PA \vdash \forall x, y (Y(0, x+y) \leq 1 + Y(0, x) + Y(x, x+y)).$$

$$I \subseteq_e M \text{ か } I \models PA \text{ のとき, } i(I) = \{ d \in M \mid \forall a \in I \exists b \in I Y(a, b) \geq d \}$$

とすれば次の補題が成り立つ。

$$\text{補題 (a) } I \subseteq_e M, I \models PA \Rightarrow i(I) \geq N$$

$$(b) \exists I \subseteq_e M, I \models PA, i(I) < I.$$

証明 (a)  $I \neq M$  としてよい。ある  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $i(I) < n$  と仮定する。  $\exists a \in I \forall b \in I Y(a, b) < n$  となる。すなわち、ある  $b > I$  に対して  $Y(a, b) < n$  となる。何故なら  $\forall b > I \Rightarrow Y(a, b) \geq n$  とすれば  $Y$  の definability より  $=$  のような最小の  $b_0$  がある。  $b_0 - 1 \in I$  となる。  $I \models PA$  より  $b_0 = b_0 - 1 + 1 \in I$  となるから。 さて、  $a \in I < b$ ,  $I \models PA$  より  $Y$  の定義を使い  $Y(a, b) > N$ . 矛盾。

$$(b) \quad a \in M, N < a \text{ とする.}$$

$$(i) \quad \forall b \in M Y(a, b) < a \Rightarrow i(M) < M$$

(ii)  $\exists b \in M Y(a, b) \geq a$  のとき、最小の  $b$  をとる。  $Y$  の定義より  $\exists I \subseteq_e M, a \in I < b, I \models PA$  となる。 よって  $\forall c \in I Y(a, c) < a$ .

故に  $i(I) < I$ .

系 1  $\forall n \in \mathbb{N} \text{ PA} \vdash \forall x \exists y (Y(x, y) > \bar{n})$

証明 補題 (a) で  $I = M$  とおく.  $\forall n \in \mathbb{N} n < i(M)$

よって  $M \models \forall x \exists y (Y(x, y) > \bar{n})$ .  $M$  は  $\omega$  である PA の countable nonstandard model であるから  $\text{PA} \vdash \forall x \exists y (Y(x, y) > \bar{n})$ .

系 2  $\mathbb{N} \models \forall x, z \exists y (Y(x, y) > z)$ .

系 3  $\text{PA} \vdash \forall x, z \exists y (Y(x, y) > z)$ .

証明 補題 (b) より  $I \in M$ ,  $I \models \text{PA}$ ,  $i(I) < I$  なる  $I$  をとる.

$i(I) \leq c \in I$  なる  $c$  が存在する. よって  $\exists a \in I \forall b \in I Y(a, b) \leq c$ .

故に  $I \models \exists x, z \forall y (Y(x, y) \leq z)$ .

定理  $\forall z \exists y (Y(0, y) > z)$  は PA で独立である.

証明 系 2, 系 3, 及び indicator の性質 (iv) より容易にできる.

(i) ~ (iv) の性質をもつ indicators の例を証明なしで 2 つあげよう. 例 2 が本報告の主題であった (H) である.

例 1.  $S$  を  $\mathbb{N}$  の有限部分集合としたとき,  $S$  が "0-dense" であるとは,  $\omega$  である有限集合のとき  $\omega$ , 1-dense とは  $S \neq \emptyset$ ,  $\min(S) + 3 < |S|$  のとき,  $(n+2)$ -dense とは  $f: [S]^3 \rightarrow 2$  なる  $\omega$  である  $f$  に対して  $\exists T \subseteq S$   $T$  は  $(n+1)$ -dense かつ均質であるときにいう.  $Y(a, b) = \max \{c \mid [a, b] \text{ は } c\text{-dense}\}$  とすれば  $Y$  は (i), (ii), (iii), (iv) を満たす indicator となる.

定理より  $\forall z \exists y ([0, y] \text{ は } z\text{-dense})$  は正しいが PA で証明できないことがわかる。

例 2.  $\Upsilon(a, b) = \max \{ c \mid [a, b] \xrightarrow{*} (2c)_c^c \}$  とおけば,  $\Upsilon$  の  $(i) \sim (iv)$  をみたす indicator であることが知られる. よって定理より  $\forall z \exists y ([0, y] \xrightarrow{*} (2z)_z^z)$  又は  $\forall x, w, z \exists y ([0, y] \xrightarrow{*} (x)_z^w)$  が正しいが PA で証明できないことがわかる。