数理解析研究所講究録
第 374 巻 1980 年 49-57

素イデアルの貼り合わせについて

広島大 理学部 柳原弘志

Traverso はその論文[3]において，可換環の seminormal 部分環の定義を与え，興味ある結果を得た。特に与えられた環 B とその部分環 A の素イデアル $\mathfrak{p}$ 上の B の素イデアル $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_n$ を貼り合わせて新しく B の部分環 A' を構成することにより，ネーター環の seminormal 部分環の構造を調べた。この講演の目的は，上の意味での素イデアルの貼り合わせに関する若干の結果を与えることである。

1° 定義 (Traverso). B をネーター環，A を B の部分環で，B は有限 A-加群となっているとする。$\mathfrak{p}$ を A の素イデアルとするとき，次の二条件を満たす A を含む最大の B の部分環 A' が存在する：

(i). A との交わりが $\mathfrak{p}$ になる A' の素イデアル $\mathfrak{p}'$ は唯一つ存在する。

(ii) $k(\mathfrak{p})$, $k(\mathfrak{p}')$ をそれぞれ $A/\mathfrak{p}$, $A'/\mathfrak{p}'$ の商体とするとき，自然に引きおこされる対応で $k(\mathfrak{p})$ と $k(\mathfrak{p}')$ は同型になる。

このA'をBから$\mathfrak{p}$上の貼り合わせによって得られる環という。又，A'を $(B; \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n)$ の貼り合わせと呼ぶ。

定義 Bをネーター環，$\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ をBの素イデアルとする。このとき，次の条件を満たすBの部分環Aが存在するとき，$(B; \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n)$ はA上貼り合わせ可能であるという：

Bは有限A-加群で，Aの素イデアル$\mathfrak{p}$があって，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n$ はBの素イデアルでAとの交わりが$\mathfrak{p}$になるもの全体である。

命題1. BをKrull次元有限のネーター環，$\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ をBの素イデアルとする。このとき，$(B; \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n)$ が貼り合わせ可能であるためには，次の二条件が満たされることが必要十分である：

(i). 任意の i, j に対し，$\dim B/\mathfrak{p}_i = \dim B/\mathfrak{p}_j$

(ii). 整域RとRから $B/\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ への単射準同型 ψ で，$B/\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ が有限R-加群となるものが存在する。

(i),(ii)が必要なことは容易に分るが，逆に(i),(ii)を満たしていれば，$A_R = \pi^{-1}(\psi(R))$ とおく。ただし，$\pi : B \to B/\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ は

自然準同型である。このとき，Bは有限A-加群で，$\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ はA_Rとの交わりが$\mathfrak{p}=A_R\cap\mathfrak{p}_1$になる$B$の素イデアル全体になり，$(B;\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n)$が貼り合わせ可能であることが示される。

今，$(B;\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n)$は命題1の条件(i),(ii)を満たし$A_R$及び$\mathfrak{p}$を上で与えたものとし，$B$から$\mathfrak{p}$上の貼り合わせによって得られる環を$A'_R$とかく。更に，$\sigma$を次の自然準同型の合成射とする：

$$B \xrightarrow{\pi} B/\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} B/\mathfrak{p}_i \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} k(\mathfrak{p}_i)$$

一方，Rの商体$Q(R)$はwから自然に得られる準同型w_1によって，$B/\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$の全商環$Q(B/\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i)=\prod_{i=1}^{n}k(\mathfrak{p}_i)$の部分体と同一視出来る。このとき，次の結果を得る。

<u>命題2.</u>　$B,\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$は命題1と同じとし，更に命題1の条件(i),(ii)を満たしているとする。又，

$$\begin{tikzcd}
B & S_1 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "g_1"] \\
\prod_{i=1}^{n} k(\mathfrak{p}_i) \arrow[from=u, "\sigma"'] & Q(R) \arrow[l, "w_1"]
\end{tikzcd}$$

をσとw_1に関するpullback図式とする。このとき，A'_Rはf_1によってS_1と同型になる。

<u>定理1</u>　$B,\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$は命題1と同じとし，命題1の条件(i),

(ii) を満たしているとする. このとき, $A_R = A'_R$ となるためには, $\mathfrak{W}_1(R) = \sigma(B) \cap \mathfrak{W}_1(Q(R))$ となることが必要十分である. 特に R が正規環であれば, A_R は $(B; \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n)$ の貼り合わせである.

2°. 定理1を応用して, Tamone [2] や Pedrini [1] によって与えられた結果を見直してみる.

例1. k を体, B を k 上の有限生成な環, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ を B の素イデアルとする. このとき, $(B; \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n)$ が貼り合わせ可能であるためには, $\dim B/\mathfrak{p}_i = \dim B/\mathfrak{p}_j$ $(\forall i, j)$ が必要十分である. 実際, $B/\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$ も k 上有限生成であるから, ネーター正規化定理により, k 上の多項式環と同型な B の部分環 R で, B が R 上有限生成加群となるものが存在するから, 命題1より, $(B; \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n)$ は貼り合わせ可能である. 定理1から, この場合 $A_R = A'_R$ となっている. 更に, $z_1, \ldots, z_d$ が B の元で k 上代数的独立で, $(\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i) \cap k[z_1, \ldots, z_d] = (z_1, \ldots, z_d)$, $B/k[z_1, \ldots, z_d]$ が整拡大となっていれば, $[k : k'] < \infty$ となる任意の部分体 k' に対し, $A = k'[z_1, \ldots, z_d] + \bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$ は $(B; \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n)$ の貼り合わせになることも証明出来る. これは Tamone [2] の主結果に他ならない.

例2. B をネーター環, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ を B の素イデアルとする.

($\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_2$でもよい)。$\pi_i : B \to B/\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2)$ を自然準同型とする．更に，環の同型$\phi : B/\mathfrak{p}_1 \to B/\mathfrak{p}_2$ がなたし，$A=\{b\in B \mid \phi\pi_1(b)=\pi_2(b)\}$ とおくとき，$B/\mathfrak{p}_1$が有限A加群になっているとする。このとき，Aは$(B; \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$の貼り合わせである．

実際，Aの定義から$A\cap\mathfrak{p}_1=A\cap\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2$が容易に分るが，これを$\mathfrak{p}$とおく。一方，

$$B=Ab_1+\cdots+Ab_s+\mathfrak{p}_1=Ab'_1+\cdots+Ab'_s+\mathfrak{p}_2$$

$$\mathfrak{p}_1=Bx_1+\cdots+Bx_t$$

とするとき，$B=A+Ab_1+\cdots+Ab_s+\sum_{i,j}Ab'_jx_i$ となることが示される．すなわち，Bは有限A加群である．このとき，$R=A/\mathfrak{p}$とおけば，命題1の条件(i),(ii)及び，定理1の条件を満たしていることが容易に確められて，$A=A_R=A'_R$となり，Aは$(B; \mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2)$の貼り合わせである．この例はPedrini [1]の定理1及び3の一般化である。

3°. 次にSerreの条件(S_2)が素イデアルの貼り合わせによって，保存されるかどうかということを考えてみる．

<u>定理2.</u> Bをネーター環，$\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$を$B$の素イデアルとする．$A$を$(B; \mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n)$の貼り合わせで，$\mathfrak{p}=A\cap\mathfrak{p}_i$とする．このとき，次が成り立つ：

(i). 各 i について, $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}_i=1$ で; B が (S_2) を満たせば; A も (S_2) を満たす。

(ii). $A\neq B$ で; 各 $\mathfrak{p}_i$ が B の正則元を含めば; $A_{\mathfrak{p}}$ の depth は 1 である。特にある i について, $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}_i>1$ なら A は (S_2) を満たさない.

この定理は Pedrini[1] の定理2及び4の一般化である。研究集会での講演では, B が整域のときにこの定理が成り立つと述べたのであるが; その後, 伊藤史朗氏により上述の型に改良された. 実際, 元の定理の証明に,「整域 A が (S_2) を満たすための必要十分条件は $A=\bigcap_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}$ が成り立つことである」という結果を用いたのであるが これを伊藤氏による次の補題でおきかえることにより同じ証明方法で定理2を示すことが出来るからである.

補題: A はネーター環で, $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}\geqq 1$ となる A の素イデアル $\mathfrak{p}$ は常に正則元を含んでいるとする. $A^{(1)}$ を $A:_A z$ を含む A の素イデアルは高さが2以上となる A の全商環 $Q(A)$ の元 z 全体の集合とする。このとき, A が (S_2) をみたすための必要十分条件は $A=A^{(1)}$ となることである.

<u>定理2の系.</u> Bをネーター環, AをBの部分環で, Bにおいてseminormalなものとする. Bは有限A加群で, $\mathfrak{C}$をAのBにおける導手とする。もし$\mathfrak{C}$のAにおける素因子で$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \geqq 2$となるものが存在し, $\mathfrak{C}$がBの正則元を含めば, Aは(S_2)を満たさない。

これはTraverso [3] の定理2.1と上述の定理2から容易に証明出来る. 又, $A, B, \mathfrak{C}$を定理2の系と同じとし, Bが(S_2)を満たすとする。このとき, $\mathfrak{C}$のBにおけるすべての素因子の高さが1であっても, Aは(S_2)を満たすとは限らない例が存在する.

4°. 最後に, 準局所環の極大イデアルの貼り合わせについて考えてみる。Aをネーター局所環, $\mathfrak{m}$をその極大イデアル, kを剰余体$A/\mathfrak{m}$とする. このとき, $\mathfrak{m}$の重複度$e_A(\mathfrak{m})$, 埋め込み次元$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, 次数環$\sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$をそれぞれ$e(A)$, $\mathrm{embdim}(A)$, $G(A)$であらわす。更に, $G(A)$のイデアル$\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$を$G(A)^+$とかく, この時, 次の結果を得る.

<u>命題3.</u> Bをネーター準局所環, $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n$をその極大イデアルとする. AをBの局所部分環, $\mathfrak{m}$をAの極大イデアルと

1, BはAと異なり，有限A-加群とする。このとき，次は同値である：

(i). AはBでseminormalで，AのBにおける導手は$\mathfrak{m}$-primary.

(ii) Aは$(B;\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_n)$の貼り合わせである．

(iii) $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{n}_n$.

(iv). $A\hookrightarrow B$から自然に得られる準同型$f:\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$は全射である．ただし，$\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{n}_n$。

(v) fは全単射である．

(vi) $\mathfrak{n}^2\cap\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2$で，$\mathrm{embdim}(A)=\sum_{i=1}^{n}[k(\mathfrak{n}_i):k(\mathfrak{m})]\,\mathrm{embdim}(B_{\mathfrak{n}_i})$

(vii) fは$G(A)^+$と$G(B_{\mathfrak{n}_1})^+\oplus\cdots\oplus G(B_{\mathfrak{n}_n})^+$の間の全単射を引きおこす．

命題4. kを代数閉体，Aをk上定義された代数多様体の閉点の局所環，Bを商体$Q(A)$におけるAの整閉被，$\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_n$をBの極大イデアルとする．このとき，次は同値である：

(i) Bは正則で，Aは$(B;\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_n)$の貼り合わせである．

(ii). $e(A)=n$で，もし$e(A)>1$ならAのBにおける導手はAの極大イデアルに等しい。

命題4.の(ii)において，導手についての条件は省けない。実

際，Aを平面曲線の通常3重点の局所環とすると，$e(A)=3$ で，Bの極大イデアルも丁度3個であるが，AはBでseminormalでないからである.

以上の結果の証明の詳細は[4]を参照されたい.

参考文献

[1] C. Pedrini, "Incollamenti di ideali primi e gruppi di Picard." Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 48(1973), 39—66

[2] G. Tamone, "Sugli incollamenti di ideali primi." Bollettino U.M.I., 14(1977), 810—825.

[3] C. Traverso, "Seminormality and Picard group", Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 24(1970), 585—595.

[4]. H. Yanagihara, "On glueings of prime ideals" to appear in Hiroshima Math. J.