数理解析研究所講究録
第 375 巻 1980 年 101-111

sine-Gordon 型非線型微分方程式の準周期解について

阪大　理　　伊達悦朗

1. このノートでは、主として、次の二つの方程式

(1) sine-Gordon 方程式

$$u_{\xi\eta} + \sin u = 0, \qquad u = u(\xi, \eta),$$

(2) Pohlmeyer, Lund-Regge の system の方程式

$$u_{\xi\eta} - \frac{v_\xi v_\eta \sin\left(\frac{u}{2}\right)}{2\cos^3\left(\frac{u}{2}\right)} + \sin u = 0, \quad u = u(\xi, \eta),\ v = v(\xi, \eta)$$

$$v_{\xi\eta} + \frac{u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi}{\sin u} = 0$$

の準周期解について考える。

これら二つの方程式はいずれも、パラメーターを含む線型微分方程式系の可積分条件として表わされ、その線型作用素の散乱理論を用いることにより、多重ソリトン解、保存則等が求められている。(散乱の逆問題の方法)。これらの方程式の、散乱の逆問題の方法の立場からみた背景等については[ ]で若干述べた。

準周期解に関する結果としては、方程式（1）については、Kozel-Kotlyarov [9], Its [8], McKean [10], Cherednik [2,3] があり、方程式（2）については [6] で述べた。

ここでは、次の点について述べる。

（A）　方程式（2）において、v＝定数の場合、方程式（2）は方程式（1）に帰着するが、この事情は、準周期解のクラスでは、超楕円曲線の、ある fixed point free involution に対応していること。

（B）　方程式（1）に関する Kozel-Kotlyarov, Its, McKean のいずれの結果においても、リーマン面上の二価関数が現われているが、この事実の解釈を（A）で述べる fixed point free involution と関連づけて与えること。

（C）　これは、より一般的な性格を持った問題であるが、リーマン面から出発して準周期解を構成する場合、得られる解は、一般には複素数値であるが、これを実数値にするためには、リーマン面にどのような制限を与えたらよいか。

2.　（A），（B）に対する説明を与える前に、まず、方程式（1）の準周期解について得られている結果のうち、今の問題に係わりある部分を紹介する。

方程式（1）は、パラメーター ζ を含む線型微分方程式系

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
& i\Psi_\xi + \frac{u_\xi}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Psi + \frac{\zeta}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Psi = 0, \\
& i\Psi_\eta + \frac{1}{2\zeta}\begin{pmatrix} 0 & e^{iu} \\ e^{-iu} & 0 \end{pmatrix}\Psi = 0
\end{aligned}
$$

の可積分条件である。([1],[17])

a)　Kozel-Kotlyarov は、この線型方程式を用いて、$w^2 + a z \prod_{j=1}^{2g}(z-z_j) = 0$ の形の超楕円曲線のリーマン面上の theta 関数で表わされる方程式（1）の解のクラスがあることを示した。その際、パラメーター ζ は、このリーマン面上の有理型関数 z と $\zeta = \sqrt{z}$ なる関係にあった。

b)　Its は $w^2 = z\prod_{j=1}^{2g}(z-z_j)$ の形の超楕円曲線のリーマン面 R 上のアーベル積分論を用いて、(3) の形の線型方程式の同時解 $\Psi = {}^t(\Psi_1, \Psi_2)$, $\Psi = \Psi(\xi, \eta, P)$, $P \in R$ を構成することにより、方程式（1）の準周期解を構成した。その際、Ψ_2 は R 上一価で、$\zeta = \sqrt{z}$ なる関係があった。

c)　McKean は u が x に関して周期的な場合に（$x = \xi - \eta$, $t = \xi + \eta$）、線型作用素（これは (3) に現われている線型作用素と同一）

$$
L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx} + \frac{i}{4}(u_x + u_t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{16\zeta}\begin{pmatrix} e^{iu} & 0 \\ 0 & e^{-iu} \end{pmatrix}
$$

の固有値問題 $Lf=\zeta f$ を考察して、二価性に言及している。

次に方程式 (2) の準周期解の構成の概略を述べる。詳細は [6] に述べた。

方程式 (2) は、パラメーター λ を含む、線型微分方程式系

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&i\,\Phi_\xi + \begin{pmatrix} 0 & \bar{a} \\ a & 0 \end{pmatrix}\Phi + \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Phi = 0 \\
&i\,\Phi_\eta + \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \cos u & -e^{-i\omega}\sin u \\ -e^{i\omega}\sin u & -\cos u \end{pmatrix}\Phi = 0
\end{aligned}
$$

$$
a = \frac{i\,(e^{i\omega}\sin u)_\xi}{2\cos u}, \quad \omega_\xi = \frac{v_\xi \cos u}{2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}, \quad \omega_\eta = \frac{v_\eta}{2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}
$$

の可積分条件である. ([11])

この形の線型方程式の同時解となるべき関数をアーベル積分論を用いて構成する。

R を、超楕円曲線 $\mu^2 + a\prod_{j=1}^{2g+2}(\lambda-\lambda_j) = 0$, $\lambda_j \neq \lambda_k$ $(j\neq k)$, $\lambda_j \neq 0$ のリーマン面（種数 $= g$）とする。 P_j (resp. Q_j), $j=1.2$ を、R 上の点で、R 上の有理型関数 λ による $\mathbb{P}^1$ への image が ∞ (resp. 0) となる点とする。点 P_j (resp. Q_j) のまわりの local parameter として λ^{-1} (resp. λ) をとる。 δ を R 上の次数 $g+1$ の正因子で $l(\delta - P_j) = 1$, $j=1.2$ なるものとする。

このとき、次の性質を持つ関数 $\Phi_j(\xi,\eta,P)$, $j=1.2$, $(\xi,\eta)\in U$, (U は $0\in\mathbb{R}^2$ のある近傍), $P\in R$ を一意的に構成できる。

i) Φ_j は $R - \{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ で（$P \in R$ の関数として）有理型で、その極因子は δ,

ii) P_k の近傍で $\Phi_j \exp\left(-\frac{i a_k \lambda \xi}{2}\right)$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, は正則かつ

$\left(\Phi_j \exp\left(-\frac{i a_k \lambda \xi}{2}\right)\right)(P_k) = \delta_{jk}$,

Q_k の近傍で $\Phi_j \exp\left(-\frac{i a_k \eta}{2\lambda}\right)$ は正則。

このような性質を持つ関数の構成は、R 上のある種の Jacobi の逆問題を解くことに帰着する。Φ_j は R 上のアーベル積分、theta 関数を用いて表示できる。

P_j, Q_j の近傍における、$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$, $\Phi = {}^t(\Phi_1, \Phi_2)$ の振舞いを調べることにより、Φ が次の方程式をみたすことがわかる。

$$i \Phi_\xi + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 \end{pmatrix} \Phi + \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi = 0,$$

(5)

$$i \Phi_\eta + \frac{1}{2\lambda(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})} \begin{pmatrix} \beta_{11}\beta_{22} + \beta_{12}\beta_{21} & -2\beta_{11}\beta_{12} \\ 2\beta_{21}\beta_{22} & -\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21} \end{pmatrix} \Phi = 0,$$

ここで α_{jk} は $\Phi_j \exp\left(-\frac{i a_k \lambda \xi}{2}\right)$ の P_k での展開の λ^{-1} の係数、β_{jk} は $\Phi_j \exp\left(-\frac{i a_k \eta}{2\lambda}\right)$ の Q_k での展開の定数項である。

(4) と (5) を比較することにより

$$u = \arccos\left(\frac{\beta_{11}\beta_{22} + \beta_{12}\beta_{21}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}}\right),$$

$$v = i \log \frac{\beta_{12}}{\beta_{21}} + v_0 \quad , \quad v_0 = \text{定数}$$

が方程式 (2) の解であることがわかる。これらの解は、R 上の theta 関数を用いて表示できる。

3．(A), (B) に対する説明を与える。

そのために、2 の後半で、方程式 (2) の準周期解の構成に用いた超楕円曲線を $\mu^2 + a\prod_{j=1}^{2g}(\lambda-\lambda_j)(\lambda+\lambda_j) = 0$, $\lambda_j^2 \neq \lambda_k^2 (j \neq k)$, $\lambda_j \neq 0$ の形のものに特殊化する。（種数 $= 2g-1$）

この超楕円曲線には、次の fixed point free involution がある。

$T: (\lambda, \mu) \longmapsto (-\lambda, -\mu)$.

この fixed point free involution の周期行列、アーベル積分への作用を考慮に入れ（cf. Rauch–Farkas [12], Fay [7]）更に因子 δ を $T\delta = \delta$ なるように選んでおけば、Φ の表示式から、次の関係式を示すことができる。

$$\Phi_1(\xi, \eta, TP) = \Phi_2(\xi, \eta, P), \quad \alpha_{12} = -\alpha_{21}, \quad \beta_{11} = \beta_{22}, \quad \beta_{12} = \beta_{21}.$$

つまり、この時 2 の後半に述べた方法で構成する方程式 (2) の解において $v =$ 定数 となる。従って方程式 (1) の解が得られる。

続いて (B) の説明を与える。$\Psi_1 = \Phi_1 + \Phi_2$, $\Psi_2 = \Phi_1 - \Phi_2$, とおくと、Ψ_1 は T-不変、Ψ_2 は T-反不変である。更に $\Psi = {}^t(\Psi_1, \Psi_2)$ は方程式

$$i\Psi_\xi + \begin{pmatrix} \alpha_{21} & 0 \\ 0 & -\alpha_{21} \end{pmatrix}\Psi + \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Psi = 0,$$

$$i\Psi_\eta + \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\beta_{11}+\beta_{12}}{\beta_{11}-\beta_{12}} \\ \dfrac{\beta_{11}-\beta_{12}}{\beta_{11}+\beta_{12}} & 0 \end{pmatrix}\Psi = 0$$

をみたす。

超楕円曲線 $\mu^2 + a\prod_{j=1}^{2g}(\lambda-\lambda_j)(\lambda+\lambda_j) = 0$ の involution T による quotient は $w^2 + az\prod_{j=1}^{2g}(z-\lambda_j^2) = 0$ で projection は $w=\lambda\mu$, $z=\lambda^2$ で与えられる。それぞれに対応するリーマン面を $\hat{R}$, R とすると、Ψ_1 は R 上の一価関数で、Ψ_2 は R 上の二価関数である。更に、λ は R 上二価である。

ここでは、$\hat{R}$ から出発して、そのある"対称性"を用いて、方程式 (1) の準周期解を構成したが、Its の場合は、R から出発して、二価性を使って方程式 (1) の解を構成している。

4. (C) について述べるために、まず次の定義から始める。symmetric Riemann surface (R,σ) とは、コンパクトリーマン面 R と R 上の anti-holomorphic involution σ の pair のことをいう。

この定義は Klein によるものである。

symmetric Riemann surface の性質は Weichold [13] により調べられている。彼の結果をいくつか述べる。

R_0 を σ に関する不動点集合とする。

$R-R_0$ は連結である(このとき $R/\langle\sigma\rangle$ は non-orientable)が、又は、丁度二つの連結成分からなる(この時 $R/\langle\sigma\rangle$ は orientable)かのいずれかである。

r を R_0 の連結成分の個数とする。

symmetric Riemann surface (R,σ) に対して triple (g,r,ε) を対応させる。ここで g は R の種数, $R/\langle\sigma\rangle$ が orientable のときに $\varepsilon=+$, non-orientable のときには $\varepsilon=-$ とおく。

r の範囲は次のようになっている。

$\varepsilon=+$ のときには, $1\leq r\leq g+1$ で $g-r+1$ =偶数

$\varepsilon=-$ のときには $0\leq r\leq g$.

symmetric Riemann surface (R,σ) が type (g,r,ε) であるとは、上のようにして、(R,σ) に対応させる triple が (g,r,ε) であるときをいう。

Weichold は更に、各 type に応じて、$H_1(R,\mathbb{Z})$ への σ の作用、period matrix (I_g,τ) の $\mathrm{Re}\,\tau$ の決定等を行っているが、ここでは省略する。

一方で、Witt [14] は一変数実代数関数体に関する研究において、次のことを示した。

type $(g,0,-)$ の symmetric Riemann surface 上には $ff^\sigma=-1$ なる有理型関数 f が存在する。ここで

$(f^{\sigma})(P) = \overline{f(\sigma P)}$.

彼の証明をみれば、f の degree (＝極の個数) は $g+1$ にとれることがわかる。

これらの結果を用いることにより、方程式 (2) の解を実数値にするには、$\mu^2 + \prod_{j=1}^{g+1}(\lambda^2 + a_j\lambda + b_j) = 0$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j^2 < 4b_j$ (type $(g, 0, -)$, $\sigma : (\lambda, \mu) \longmapsto (\bar{\lambda}, \bar{\mu})$) の形の超楕円曲線をとればよく、方程式 (1) の解を実数値にするには

$\mu^2 + \prod_{j=1}^{g}(\lambda^2 + a_j\lambda + b_j)(\lambda^2 - a_j\lambda + b_j) = 0$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j^2 < 4b_j$ (type $(2g-1, 0, -)$, $\sigma : (\lambda, \mu) \longmapsto (\bar{\lambda}, \bar{\mu})$) の形の超楕円曲線をとればよいことがわかる。

5. 3, 4 で述べたことを用いれば、[5] で扱った massive Thirring model の方程式の準周期解も構成できる。ただし、その場合には、4つの fixed points をもつ involution を用いる。

更に、3, 4 での議論は Zakharov-Mikhailov [15], Zakharov-Shabat [16] が考えている方程式系：

$$\Phi_\xi = U(\lambda, \xi, \eta)\Phi,\quad \Phi_\eta = V(\lambda, \xi, \eta)\Phi,\quad \Phi = \Phi(\lambda, \xi, \eta),\quad \Phi, U, V : N \times N \text{ 行列},$$

U, V はパラメーター λ の有理関数で、その極は (ξ, η) に依らない、という形の線型方程式の可積分条件として表わされる、U, V の成分に関する非線型方程式系、の準周期解の構

成を考える場合にも、重要であると思われる。(Zakharov-Mikhailov, Zakharov-Shabat の意味での"reduction")。Cherednik [4] も同様の問題を扱っているが、このノートの 3 で述べた"reduction"、あるいは 4 で述べた symmetric Riemann surface には言及していない。

References

[1] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur. Phys. Rev. Lett., 30, 1262–1264 (1973)

[2] I.V. Cherednik. Funct. Anal. Appl., 12 (3), 45–54 (1978) (Russian)

[3] ———. ———, 13 (1), 81–82 (1979) (Russian)

[4] ———. Dokl. Akad. Nauk USSR, 246 (3), 575–578 (1979) (Russian)

[5] E. Date. Prog. Theor. Phys., 59, 265–273 (1978)

[6] ———. 数理研講究録 349, 8–31 (1979)

[7] J.D. Fay. Lect. Note in Math. 352, Springer, 1973

[8] A.R. Its, preprint

[9] V.A. Kozel and V.P. Kotlyarov. Dokl. Akad. Nauk UkSSR. Ser. A 10, 878–881 (1976) (Ukrainian)

[10] H.P. McKean. Helsinki Congress での講演原稿

[11] K. Pohlmeyer Commun. math. phys. 46, 207–221 (1976)

[12] H. E. Rauch and H. M. Farkas : Theta functions with applications to Riemann surfaces, Williams & Wilkins, 1974

[13] G. Weichold. Zeitschrift f. Math. u. Phys, 28 321-351 (1883)

[14] E. Witt. J. Reine Angew. Math. 171, 4-11 (1934)

[15] V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov. J. Exp. Theor. Phys. 74, 1953-1973, (1978) (Russian)

[16] V. E. Zakharov and A. V. Shabat. Funct. Anal. Appl. 13 (3), 13-22 (1979) (Russian)

[17] V. E. Zakharov, L. A. Takhtadzhian and L. D. Faddeev Soviet Phys. Dokl, 19 824-826 (1974)