数理解析研究所講究録
第376巻 1980年 22-38

弱双曲系に対するある注意

京大 工 多羅間茂雄

I. 序 弱双曲系に対する非特性初期値問題を考える。特性根の重複度一定の場合の単独の双曲型方程式の初期値問題については、C^∞ well posed になるための条件が知られている。一方 system の場合に、特性根の重複度一定の仮定の下で、C^∞ well posed になるための条件を求める問題に関し多くの研究があるが、単独方程式の場合と異なり、特性根の重複度が一定であっても作用素の主要部の行列としての構造は必ずしも安定していない、このために、一般的に単独方程式の場合と同じ様には、C^∞ well posed になるための条件を簡潔に表わすことはまだ出来ていない。(以上のことについては W. Matsumoto [1] 参照) 本報告では、同様の問題を函数空間が Gevrey class の場合に考え、そこでの well posed になるための条件を考察する。尚この様に Gevrey class で考えることは、W. Matsumoto [1] で与えられた、C^∞-well posed ではないが、指数がある一

定の値以上のどの Gevrey class でも well posed になる例に由来する。

Ⅱ 定義と結果　$T>0$ とし，$\Omega=[0,T]\times R^n_x$ とする。$s>1$ に対し，$\gamma^{(s)}(\Omega)\ni f$ とは i) $f\in C^\infty(\Omega)$ かつ ii) 任意のコンパクト集合 $K\subset\Omega$ に対し定数 $A>0$ が定まり，任意の $\alpha\in N^{n+1}$ に対し $|D^\alpha f(x)|\leq A^{1+|\alpha|}|\alpha|!^s$ $x\in K$ が成立つ，この i) ii) が満足されることとする。ここで $\alpha=(\alpha_0\ldots\alpha_n)$ とする時 $|\alpha|=\sum_{i=0}^n|\alpha_i|$，$D^\alpha=D_t^{\alpha_0}D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$，$D_{x_k}=-\frac{1}{i}\partial/\partial x_k$ とする。

さて $m\times m$ system $P=D_t-\sum_{i=1}^n A_i(t,x)D_{x_i}+B(t,x)$ を考える。この P に対し次の仮定をする。

[H-0]　$\rho(\tau,\xi,t,x)\equiv\det\left(\tau I_m-\sum_{i=1}^n A_i(t,x)\xi_i\right)$ として，$(t,x,\xi)\in\Omega\times R_\xi\backslash 0$ に対し，

$$\rho(\tau,\xi,t,x)=\prod_{i=1}^{\ell}(\tau-\lambda_i(t,x,\xi))^2\prod_{j=\ell+1}^{m-\ell}(\tau-\lambda_j(t,x,\xi))$$

と分解出来，λ_i は実数値函数で $i\neq j$ の時 $\lambda_i\neq\lambda_j$ である。

[H-S_0]　($S_0>1$)

$A_i(t,x)$，$B(t,x)$ の各成分が $\gamma^{(S_0)}(\Omega)$ の元であり，$A_i(t,x)$ の各成分は Ω 上で有界である。

作用素 P に対し次の初期値問題

$$[C]\begin{cases} Pu = f & \text{in } \Omega \\ u(0,x) = \varphi(x) & \text{on } R^n_x \end{cases}$$ を考える。

定義. 初期値問題 [C] が $\gamma^{(s)}$- well posed とは.

i) 任意の $f \in \gamma^{(s)}(\Omega)$ と任意の $g \in \gamma^{(s)}(R^n)$ とに対し [C] の解 $u \in \gamma^{(s)}(\Omega)$ が存在する。

ii) $u \in C^1(\Omega)$ で

$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{in } \Omega \\ u(0,x) = 0 & \text{on } R^n \end{cases}$$ であれば、 Ω で

$u = 0$ となる。

この i) ii) が成立することとする。

次に行列 L を

$L(t,x,\tau,\xi) \equiv {}^{co}P_1 \, P_s \, {}^{co}P_1 + \frac{1}{2} {}^{co}P_1 \{P_1, {}^{co}P_1\}$ で定義する。

ここで $P_1 = I_m \cdot \tau - \sum_{i=1}^{n} A_i \xi_i$, $P_s = B - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} D_{x_i} P_1$,

${}^{co}P_1$: P_1 の余因子行列, $\{P_1, {}^{co}P_1\} = \frac{\partial}{\partial\tau} P_1 \, D_t {}^{co}P_1 - D_t P_1 \frac{\partial}{\partial\tau} {}^{co}P_1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} P_1 \, D_{x_i} {}^{co}P_1 - D_{x_i} P_1 \frac{\partial}{\partial \xi_i} {}^{co}P_1 \right)$ とする。

定理 作用素 P が条件 [H.0], [H.S₀] を満足しているとする。この時

[L] $L_j = L(t,x,\lambda_j,\xi) = 0$ $j=1\cdots l$. $(t,x,\xi) \in \Omega \times R^n_\xi \backslash 0$

であれば、初期値問題 [C] は $s \geq s_0$ に対し、$\gamma^{(s)}$-well posed である。

注意 1. Y. Ohya [3] によれば、$s_0 < 2$ である時、条件 [L] がなくても、$s_0 \leq s < 2$ では、$\gamma^{(s)}$-well posed になる。

2. 係数が C^∞ の時、一様に C^∞-well posed であるための必要条件が条件 [L] であり、更に rank $[I_m \lambda_i - \sum A_j \xi_j]$ が一定であれば、条件 [L] は C^∞-well posed のための十分条件にもなっている。(H. Yamahara [4] 等による。)

3. Gevrey class の範囲で考える場合に、条件 [L] を置く必要性に関しては、W. Matsumoto [1] 参照。

4. ${}^{c_0}P_1|_{\tau=\lambda_j} \neq 0$ となるのは rank $(I_m \lambda_j - \sum A_i \xi_i) = m-1$ の時だけである。

Ⅲ 定理の証明　以下 P は [H-0], [H-s_0] [L] を満足しているとする。

$p(t, x, \xi) \in L^k_s$ とは i) $p \in C^\infty(\Omega \times R^n_\xi \backslash 0)$,

ii) ξ に関して k次の 斉次函数 iii) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ と任意の $\beta \in N^n$ とに対し定数 $A > 0$ が定まり

任意の $\alpha \in N^{n+1}$ と $x \in K$ に対し $|D^\alpha \partial^\beta_\xi p(x, \xi)| \leq A^{1+|\alpha|} |\alpha|!$ が成立つ。

これら i), ii), iii) が満足されることとする。

P の特性根 λ_i は $L^1_{s_0}$ の元である。

$PS(m, s_0) \ni P(t, x, D_x)$ とは、t を parameter として持つ R^n_x 上の擬微分作用素でその symbol $p(t, x, \xi)$ が、

1) $p(t, x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times R^n_\xi)$

2) 任意の $\beta \in N^n$ に対し定数 A があって、任意の $\alpha \in N^{n+1}$ と $(t, x, \xi) \in \Omega \times R^n_\xi$ に対し

$$|D^\alpha \partial_\xi^\beta a(t, x, \xi)| \leq A^{1+|\alpha|} |\alpha|!^{s_0} (1+|\xi|)^{m-|\beta|}$$

が成立する。

この 1), 2) を満足するものとする。

§1. 条件 [L] について.

[H-0] より、行列 $A = \sum_{i=1}^{n} A_i(t, x)\xi_i$ の固有値は λ_i $i=1 \cdots m-l$ である。Q_i^0 で、固有値 λ_j に対する一般化固有空間への射影とする。この時 $Q_i^0 \in L^0_{s_0}$ となる。この Q_i^0 を用いて、条件 [L] を書いてみる。

$$P_1 = \tau I_m - A$$
$$= \sum_{j=1}^{m-l} (\tau - \lambda_j) Q_j^0 + \sum_{j=1}^{l} (\lambda_j - A) Q_j^0$$
$${}^{co}P_1 = \sum_{j=1}^{l} g_j(\tau) \{(\tau - \lambda_j) - (\lambda_j - A)\} Q_j^0 + \sum_{i=l+1}^{m-l} h_i(\tau) Q_i^0$$

となる。ここで

$$g_i(\tau) = \prod_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{l} (\tau - \lambda_j)^2 \prod_{k=l}^{m-l} (\tau - \lambda_k) \qquad i=1 \cdots l$$
$$h_i(\tau) = \prod_{j=1}^{l} (\tau - \lambda_j)^2 \prod_{\substack{k=l \\ k \neq i}}^{m-l} (\tau - \lambda_k) \qquad i=l+1 \cdots m-l$$

補題 1-1　　$k=1\cdots l$ に対し

$$
{}^{co}P_1\{P_1,\ {}^{co}P_1\}|_{\tau=\lambda_k}
$$

$$
= 2\ g_k^2(\lambda_k)(A-\lambda_k)Q_k^0\ \{(\tau-\lambda_k)I_m,\ (A-\lambda_k)\}Q_k^0
$$

$$
+\ g_k^2(\lambda_k)\ (A-\lambda_k)\ Q_k^0 \sum_{i\neq k} (\lambda_k-\lambda_i)\{Q_i^0,\ Q_k^0\}(A-\lambda_k)Q_k^0
$$

$$
+\ g_k^2(\lambda_k)\ (A-\lambda_k)Q_k^0 \sum_{\substack{i\neq k\\ 1\leq i\leq l}} \{(\lambda_i-A)Q_i^0,\ Q_k^0\}(A-\lambda_k)Q_k^0
$$

このことは $Q_k^0Q_j^0=\delta_{kj}Q_j^0$, $(A-\lambda_k)^2Q_k^0=0$,
$(A-\lambda_k)Q_k^0\{(A-\lambda_k)Q_k^0,\ (A-\lambda_k)Q_k^0\}=0$ に注意すれば $\{\ ,\ \}$ の定義から得られる。

系　1-2

$$
O_1=\tau I_m-\sum_{i=1}^{m-l}\{\lambda_iQ_i^0+(\lambda_i-A)Q_i^0\}
$$
とすると、
$k=1,2\ldots l$ に対し

$$
{}^{co}O_1\{O_1,\ {}^{co}O_1\}|_{\tau=\lambda_k}-{}^{co}P_1\{P_1,\ {}^{co}P_1\}|_{\tau=\lambda_k}
$$

$$
= -2g_k^2(\lambda_k)\ (A-\lambda_k)\ Q_k^0 \sum_{\substack{i\neq k\\ 1\leq i\leq l}} \{(\lambda_i-A)Q_i^0,\ Q_k^0\}(A-\lambda_k)Q_k^0
$$

となる。

これは ${}^{co}Q_1=\sum_{j=1}^{l} g_j(\tau)\{(\tau-\lambda_j)+(\lambda_j-A)\}Q_j^0+\sum_{j=l+1}^{m-l}$
$h_j(\tau)Q_j^0$ となることと、補題 1-1 とから得られる。

補題1-1と系1-2とから.

補題1-3 $L^0_{S_0}$ の元 O_0 を

$$O_0 = B + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \partial_{\xi_i} D_{x_i}(P_i - O_1) + \sum_{k=1}^{l} g_k^2(\lambda_k) Q_k^0 \sum_{\substack{i \neq k \\ 1 \le i \le m-l}} \{(\lambda_i - A) Q_i^0, Q_k^0\} Q_k^0$$

とすれば.

$O_1 + O_0$ は条件 [L] を満足する。

注意. スカラー函数 $\alpha \in \gamma^{(S_0)}(\mathbb{R})$ に対して.

$\alpha P + (1-\alpha)(O_1 + O_0)$ も条件 [L] を満足する。特に $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}(O_1 + O_0)$ とすると, その主要部は $I_m \tau - \sum_{i=1}^{m-l} \lambda_i P_i$ であり, 対称化可能である。

上の注意から. 任意の正の数 $R > 0$ に対し. $\tilde{P} = D_t + \hat{A}(t,x,D)$ ($\hat{A} \in PS(1, S_0)$) があり。$\hat{A}(t,x,D)$ の symbol を $\hat{a}(t,x,\xi)$ とする時, $|x| < R$ で. $\hat{a}(t,x,\xi) = -A + B$. 即ち. $|x| < R$ で $\tilde{P} = P$, 更に. $\hat{a}(t,x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ $a_j \in L^{1-j}_{S_0}$ と漸近和に書けて. $\tau + a_1 + a_0$ は. 条件 [H-0]. と [L] とを満足する。そして $|x| > 2R$ では $\hat{a}(t,x,\xi)$ は ξ のみの函数となる。以上の性質を満足するものが取れる。

Pの共式的共役P^*に対しても[H-0] [H-S_0]. [L]が満たされ、更に、条件[L]がHolmgren変換に対し不変であることから、定理を証明するには、上で述べた$\tilde{P}$に対する初期値問題で、初期値が$\gamma^{(s)} \cap \mathcal{E}'$となっているものに対する解が$\gamma^{(s)}(\Omega)$で存在することを示せば十分である。

以下では$\tilde{P}$を改めてPと書く。この時 次の命題が成立する。

命題 1–5　任意の$k=1,2,3\cdots$に対し、作用素$\tilde{O}_k$

$$\tilde{O}_k = D_t^{2^{k-1}-1} + \sum_{j=1}^{2^{k-1}-1} A_j(t,x,D_x)\, D_t^{2^{k-1}-1-j}$$

があり、

$$P\tilde{Q}_k = \Lambda^{2^{k-1}} + \sum_{j=1}^{2^{k-1}} B_j(t,x,D_x)\, \Lambda^{2^{k-1}-j}$$

となる。

ここで　$A_j \in PS(\ j\ ,\ S_0)$

$B_j \in PS(0, S_0) \qquad j=1 \cdots K-1$

$B_j \in PS(1, S_0) \qquad j \geq K$

$$\Lambda = D_t - \sum_{j=1}^{m-l} \lambda_j P_j(t,x,D_x) + \alpha$$

$\alpha \in PS(0, S_0)$

任意の$f \in \gamma^{(s)}(\Omega) \cap \mathcal{E}'$　$S_0 \leq S$に対し、方程式

$$\begin{cases} Pu = f \\ u(0,x) = 0 \end{cases}$$

は、

$u=\widetilde{O}_K v$ とすると

$$\begin{cases} P\widetilde{\partial}_K v = f \\ D_t^i v(0,x)=0 \quad i=0,1,\ \ 2^{k-1}-1. \end{cases}$$ の解を求めることに

なるが、命題1-5より、Λ は L_2 well posed な作用素であることに注意すれば、$k>s$ となる k を取れば、解 $v\in\mathcal{E}^{(s)}$ が存在することがわかる。（Y. Ohya [3]）

§2. 命題1-5の証明

先ず、記号を導入する。

$a_j\in L_{s_0}^{n-j}$ に対する形式和 $A=\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ の集合を $\widetilde{L}_{s_0}^{n}$ で表わし

$(A)_j \equiv a_j$ とする。

$A^i\in\widetilde{L}_{s_0}^{n_i}\qquad A^i=\sum_{j=0}^{\infty} a_j^i\qquad i=1,2$ に対し

$A^1\circ A^2\in\widetilde{L}_{s_0}^{n_1+n_2}$ を

$$A^1\circ A^2=\sum_{j=0}^{\infty} C_j\qquad C_j=\sum_{l+m+|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_l^1 D_x^\alpha a_m^2$$

と定義する。

$$\widetilde{L}_{s_0}=\bigcup_{n=0,\pm1\cdots}\widetilde{L}_{s_0}^{n}.$$

$\widetilde{L}^n[\tau]$ で $\widetilde{L}_{s_0}$ の元を係数とする n 次多項式全体を表わす。$\widetilde{L}[\tau]=\bigcup_{n=0,1\cdots}\widetilde{L}^n[\tau]$.

$\alpha_i\in\widetilde{L}^{n_i}[\tau]\qquad \alpha_i=\sum_{j=0}^{n_i} A_j^i\,\tau^{n_i-j}\qquad i=1,2$

に対し、$\alpha_1\circ\alpha_2\in\widetilde{L}^{n_1+n_2}[\tau]$ を

$$\alpha_1\circ\alpha_2=\sum_{j=0}^{n_1+n_2} B_j\,\tau^{n_1+n_2-j}$$

$$B_j = \sum_{l+s+m=j} \binom{n_1-l}{s} A^1_l \circ D^s_\tau A^2_m$$ と定義する。

ここで $D^s_\tau A^2_m = \sum_{j=0}^{\infty} D^s_\tau (A^2_m)_j$ とする。

この§では、P及び、Pに対し系1-3で定義された $O = O_1 + O_1$ を $\tilde{L}^1[\tau]$ の元と見る。即ち $P = I_m\tau + A$ $A \in \tilde{L}^1$ であり、$-(A)_0$ は [H.0]を満足し、$P_1 = I_m\tau + (A)_0$ $P_0 = (A)_1$ として [L]を満足する。

$Q_i^0 \in L^0_{s_0}$ を $-(A)_0$ の固有値 λ_i に対する一般化固有空間への射影とする。この時次の補題が成立する。

補題2-1

$Q_i \in \tilde{L}^0_{s_0}$ で次を満たすものがある。 $(i=1 \cdots m-l)$

$(Q_i)_0 = Q_i^0$,

$Q_i \circ Q_j = 0 \quad i \neq j$,

$Q_i \circ Q_i = Q_i$, $\sum_{i=1}^{m-l} Q_i = I$

補題2-2 (上の Q_i を用いた P の block 対角化)

$M, N \in \tilde{L}^{-1}_{s_0}$ があって

$(I+M) \circ (I+N) = I$ で、

$\tilde{P} = (I+M) \circ P \circ (I+N)$ とすると

$Q_i \circ \tilde{P} \circ Q_j = 0 \quad i \neq j$ となる。

注意　$O = O_1 + O_0$ に対しても $\tilde{M}, \tilde{N} \in \tilde{L}^0_{s_0}$ が取れて，補題 2-2 の主張が成立する。

$\tilde{Q} = (I+\tilde{M}) \circ Q \circ (I+\tilde{N})$ とする。

$\tilde{R} = \frac{1}{2}(\tilde{P} + \tilde{Q})$.

$\tilde{P}_1 = \tilde{P}, \quad \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}$ とし

$s \geq 2$ に対し　$\tilde{P}_s = \tilde{P}_{s-1} \circ \tilde{Q}_{s-1}$, $\tilde{Q}_{s} = 2\tilde{R}^{2^{s-1}} - \tilde{P}_s$ で

順次 $\tilde{P}_s$, $\tilde{Q}_s$ を定義する。この時

補題 2-3

$$\tilde{P}_s = \tilde{R}^{2^{s-1}} + \sum_{j=1}^{2^{s-1}} A_j \circ \tilde{R}^{2^{s-1}-j}$$

$$A_j \in \tilde{L}^0_{s_0} \quad j = 1 \ldots s-1.$$
$$A_j \in \tilde{L}^1_{s_0} \quad j = s \ldots 2^{s-1}$$

この証明は §3 で与える。

系 2-4　　$s = 1, 2, 3 \cdots$ とする。

P に対し　$R_s \in \tilde{L}^{2^{s-1}-1}_{s_0}$ 【τ】 が取れて

$$P \circ R_s = \tilde{\tilde{R}}^{2^{s-1}} + \sum_{j=0}^{2^{s-1}} B_j \circ \tilde{\tilde{R}}^{2^{s-1}-j}$$

$$B_j \in \tilde{L}^0_{s_0} \quad j = 1 \ldots s-1$$
$$B_j \in \tilde{L}^1_{s_0} \quad j = s, \ldots 2^{s-1}$$

ここで　$\tilde{\tilde{R}} = (I+N) \circ \tilde{R} \circ (I+M)$

このことは、補題2-3と $\widehat{P}_S = \widetilde{P} \circ \widehat{Q}_1 \circ \cdots \circ \widehat{Q}_{S-1}$ と、

$(I+N) \circ \widetilde{P} \circ (I+M) = P$ とから、明らか。

系2-4より命題1-5が従がう。

§3 補題2-3の証明

補題2-1の Q_i $i=1 \ldots m-l$ $\in \widetilde{\mathcal{L}}^0_{S_0}$ に対し、

$$Q_i = [\mathbb{b}_i^1 \cdots \mathbb{b}_i^n] = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_i^1 \\ \mathbb{C}_i^n \end{bmatrix}$$ とする。

$\mathbb{b}_i^s$: $n \times 1$ vector, $\mathbb{C}_i^s$: $1 \times n$ vector

各 $(t_0, x_0, \xi_0) \in \Omega \times R^n_\xi \setminus 0$ に対し (t_0, x_0, ξ_0) の錐近傍 V が取れて、そこでは、

$$\mathbb{b}_1^{n_1}, \mathbb{b}_1^{n_1'}, \mathbb{b}_2^{n_2}, \mathbb{b}_2^{n_2'} \cdots \mathbb{b}_l^{n_l} \mathbb{b}_l^{n_l'} \mathbb{b}_{l+1}^{n_{l+1}} \cdots \mathbb{b}_{m-l}^{n_{m-l}}$$

$$\mathbb{C}_1^{k_1}, \mathbb{C}_1^{k_1'}, \mathbb{C}_2^{k_2}, \mathbb{C}_2^{k_2'} \cdots \mathbb{C}_l^{k_l} \mathbb{C}_l^{k_l'}, \mathbb{C}_{l+1}^{k_{l+1}} \quad \mathbb{C}_{m-l}^{k_{m-l}}$$

が取れて、

$$E = [\mathbb{b}_1^{n_1} \ \mathbb{b}_1^{n_1'} \cdots \qquad \mathbb{b}_{m-l}^{n_{m-l}}]$$ とした時、

$(E)_0$ は V で正則

$$F = {}^t[{}^t\mathbb{C}_1^{k_1}, {}^t\mathbb{C}_1^{k_1'} \cdots \qquad {}^t\mathbb{C}_{m-l}^{k_{m-l}}]$$ も、

$(F)_0$ が V で正則

となる様に出来る。

この時 Q_i の性質より

$$F \circ E = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{m-l} \end{pmatrix}$$

$A_i \in \tilde{L}^0_{s_0}$.

$A_i \quad (i=1 \cdots l) \quad 2\times 2$ 行列,

$A_i \quad (i=l+1 \cdots m-l) \quad$ スカラー　　となる。

更に、$\exists\, B_i \in \tilde{L}^0_{s_0}$ があって、V で

$$\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_{m-l} \end{pmatrix} \circ F \circ E = I_m$$

となる。

補題 2-2 より、V で

$$\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_{m-l} \end{pmatrix} \circ F \circ \tilde{P} \circ E = \begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_{m-l} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_{m-l} \end{pmatrix} \circ F \circ \hat{Q} \circ E = \begin{pmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_{m-l} \end{pmatrix}$$

$j=1 \cdots l$ の時

$$p_j = I - \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + \alpha_1^j + \alpha_0^j + \cdots$$

$$q_j = I - \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} - \alpha_1^j + \tilde{\alpha}_0^j + \cdots$$

$\alpha_1^j \in L^1_{s_0} \qquad \alpha_k^j,\ \tilde{\alpha}_k^j \in L^{+k}_{s_0}$

$(\alpha_1^j)^2 = 0$

となる。

このことは

$$\tilde{P} = \tau I_m + \sum_{i=1}^{m-l}(-\lambda_i)Q_i^0 + \sum_{i=1}^{l}((A)_0+\lambda_i)Q_i^0 + p_0$$

$$p_0 \in \tilde{L}_{s_0}^0$$

$$\tilde{Q} = \tau I_m + \sum_{i=1}^{m-l}(-\lambda_i)Q_i^0 - \sum_{i=1}^{l}((A)_0+\lambda_i)Q_i^0 + q_0$$

$$q_0 \in \tilde{L}_{s_0}^0$$

で $(((A)_0+\lambda_i)Q_i^0)^2=0$ となることから言える。

$j = l+1 \cdots m-l$ に対しては　V で

$$P_j = \tau - \lambda_j + \alpha_0^j + \alpha_{-1}^j + \cdots$$
$$q_j = \tau - \lambda_j + \hat{\alpha}_0^j + \hat{\alpha}_{-1}^j + \cdots$$

$$\alpha_k^j,\ \hat{\alpha}_k^j \in L_{s_0}^{+k}$$

以下では錐近傍 V 上でのみ考える。

P 及び Q は条件［L］を満足するが，この時一般に

$A, B \in \tilde{L}_{s_0}^0$ で $A \circ B = I$ となるものに対し，

$A \circ P \circ B$, $A \circ Q \circ B$ も条件［L］を満足する。

このことから，$j=1 \cdots l$ に対し

P_j，及び q_j が条件［L］を満足する。即ち

$$(P_j)_1 = \tau - (\lambda_j^0) + \alpha_1^j$$
$$(P_j)_0 = \alpha_0^j \qquad \text{として}$$

$$\omega(P_j)_1 (P_j)_s \omega(P_j)_1 + \frac{1}{2}\omega(P_j)_1\{(P_j)_1, \omega(P_j)_1\}\Big|_{\tau=\lambda_j} = 0$$

$\tilde{R}$の定義より

$$\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_{m-l} \end{pmatrix} \circ F \circ \tilde{R} \circ E = \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & & \\ & & r_{m-l} \end{pmatrix}$$

$$= I - \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{m-l} \end{pmatrix} + R'$$

$$R' \in \tilde{L}^{0}_{s_0}$$

$$r_j = \frac{1}{2}(p_j + q_j)$$

一般に　$s = 1, 2 \cdots$　に対し

$$\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_{m-l} \end{pmatrix} \circ F \circ \tilde{P}_s \circ E = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1^{\,s} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{p}_{m-l}^{\,s} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_{m-l} \end{pmatrix} \circ F \circ \tilde{Q}_s \circ E = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^{\,s} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{q}_{m-l}^{\,s} \end{pmatrix}$$

となるが、

$$\tilde{p}_i^{\,1} = p_i \ , \quad \tilde{q}_i^{\,1} = q_i$$

$$\tilde{p}_i^{\,s} = \tilde{p}_i^{\,s-1} \circ \tilde{q}_i^{\,s-1} \ , \quad \tilde{q}_i^{\,s} = 2 r_i^{\,2^{s-1}} - \tilde{p}_i^{\,s}$$

となることが、$\tilde{P}_s$, $\tilde{Q}_s$ の定義から、わかる。

この時、

補題3-1

$$\tilde{p}_j^{\,s} = r_j^{\,2^{s-1}} + \sum_{k=1}^{2^{s-1}} \delta_k \circ (r_j)^{2^{s-1}-k}$$

$$\delta_k \in \tilde{L}^{0}_{s_0} \qquad k = 1 \ldots s-1,$$

$$\delta_k \in \tilde{L}^{1}_{s_0} \qquad k = s, \cdots, 2^{s-1}.$$

となる。 $j = l+1, .. m-l$ に対して補題 3-1 が成立するのは明らか。補題 2-3 は補題 3-1 から従う。

$$P_j = \tau - \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + \alpha_1^j + \cdots$$

$\alpha_j^{j\,2} = 0$ であった。

$V' = \{ (t, x, \xi) \in V : \alpha_1^j(t, x, \xi) \neq 0 \}$ とすると、

$(t_0, x_0, \xi_0) \in V'$ に対して その錐近傍で、$G, H \in \tilde{L}^{0}_{s_0}$ が取れて、 $G \circ H = I$ であって、

$$G \circ p_j \circ H = \tau - \begin{pmatrix} \lambda_j & \alpha_j \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11}^0 & p_{12}^0 \\ 0 & p_{22}^0 \end{pmatrix} + p^{-1}$$

$$G \circ q_j \circ H = \tau - \begin{pmatrix} \lambda_j & -\alpha_j \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11}^0 & q_{12}^0 \\ 0 & q_{22}^0 \end{pmatrix} + q^{-1}$$

$$G \circ r_j \circ H = \tau - \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11}^0 & r_{12}^0 \\ 0 & r_{22}^0 \end{pmatrix} + r^{-1}$$

$$p_{ij}^0,\ q_{ij}^0,\ r_{ij}^0 \in L^{0}_{s_0}$$

$p^{-1}, q^{-1}, r^{-1} \in \tilde{L}^{-1}_{s_0}$ となる。

これが条件 [L] の言い換えである。(H. Yamahara [4])

また $(t_0, x_0, \xi_0) \notin \overline{V'}$ に対しては、その錐近傍で、

$$P_j = \tau - \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + p_0$$

$$q_j = \tau - \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + q_0$$

$$p_0, q_0 \in \tilde{L}^{0}_{s_0}$$

となることに注意すれば、補題3-1を得る。尚詳しい証明に関しては S. TARAMA [2] 参照。

参考文献

[1] W. Matsumoto : On the conditions for the hyperbolicity of systems with double characteristic routs. (to appear)

[2] S. Tarama. : Sur le problème de Cauchy pour une classe de systèmes faiblement hyperboliques dans une classe de Gevrey. (à paraître)

[3] Y. Ohya : Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristiques multiples, Jour. Math. Soc. Japan, 16, 268-286 (1964).

[4] H. Yamahara : On the Cauchy problem for weakly hyperbolic systems, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 12, 493-512 (1976)