数理解析研究所講究録
第 376 巻 1980 年 71-87

Navier-Stokes方程式の境界値問題の解の解析性について

東北大 理　小松 玄

§0. 序

x-空間の領域Ω内に満たされた非圧縮性粘性流体の運動を記述する，非定常Navier-Stokes方程式の境界値問題を考えよう．本稿では，Ωを解析的な境界を持つ有界領域とし，滑らかな解の境界まで込めての解析性を論ずる．その詳細は[6]にある．本稿に対応する講演においては，証明には殆んどふれなかった．ここでは証明の概略を述べようと思う．証明の方針は，非線型放物型方程式の場合の類似な結果（[5]を見られたい）に対するものと同じである．放物型方程式に対するDirichlet問題の場合には議論が簡単になるので，まずその場合の証明をたどり，しかる後にその議論をどの様に変更すればよいかを述べる．

§1. Navier-Stokes 方程式の解の解析性

Ω を x-空間 $\mathbb{R}^n$ の有界領域とする．境界 $\partial\Omega$ はいくつかの連結成分を持っていてよいが，その各々は解析的な超曲面を成すとする．I を t-空間 $\mathbb{R}$ の有界開区間とし，(x,t)-空間 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 内の柱状領域 $Q=\Omega\times I$ において，非定常 Navier-Stokes 方程式

(1.1) $\partial_t v - R^{-1}\Delta v + \mathrm{grad}\, p = f - (v\cdot\mathrm{grad})v,\quad \mathrm{div}\, v = 0$

の解 $(v,p)\in C^\infty(\overline{Q})$ で，次の Dirichlet 境界条件を満たすものを考える：

(1.2) $$v = 0 \quad \text{on } \Gamma = \partial\Omega\times I .$$

ここで v は速度 vector，p は圧力 potential，f は外力 vector を表わす．R は Reynolds 数と呼ばれる正の定数である．scale を変えることにより，$R=1$，$I=\{0<t<1\}$ と仮定してよい．$F=f-(v\cdot\mathrm{grad})v$ とおけば，(1.1) は

(1.1′) $(\partial_t-\Delta)v + \mathrm{grad}\, p = F(\nabla_x v, v, x, t),\quad \mathrm{div}\, v = 0 \quad \text{in } Q$

と書ける．我々は (1.1) より一般に (1.1′) の形で考える．次のことを仮定する：

(1.3) $F(\alpha,\beta,x,t)$ は $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^{n^2}\times\mathbb{R}^n$，$(x,t)\in\overline{Q}$ に対して，(α,β,x,t) の $\mathbb{R}^n$-値解析函数である．

σ，$0\leqq\sigma<1$，に対して次の様におく：

(1.4) $$Q_\sigma=\Omega\times I_\sigma,\qquad I_\sigma=\{t\,;\,\sigma<t<1\}.$$

このとき次を得る：

<u>定理 1</u>（[6]）．条件（1.3）の下で，問題（1．1′−2）の解 $(v, \mathrm{grad}\, p) \in C^\infty(\overline{Q})$ は，$\overline{Q}_\sigma$ 上で解析的である．ここで σ は，$0 < \sigma < 1$ を満たす任意の数とする．

<u>注意</u> i)（[6]）．境界条件（1.2）は次の様に一般化される：

$$v = \varphi \qquad \text{on} \quad \Gamma.$$

但しここで，φ は $\overline{\Gamma}$ 上で解析的であって，$\partial\Omega$ の Ω に関する単位外法線 $\boldsymbol{\nu}$ に対して次の条件を満たすものとする：

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi(\cdot, t)\, dS = 0 \qquad \text{for} \quad t \in I.$$

この様な一般化は，後述の補題 3.2（の弱い形）を使って，[2；pp. 112−113] の論法を修正することにより成される．

ii)．領域内部での解の解析性については，[7]，[3] がある．これらは共に速度 v と vorticity $\mathrm{rot}\, v$ の二階連立方程式系を取り扱うのであるが，$\mathrm{rot}\, v$ に対する境界条件が与えられていないので，境界まで込めての解析性を含んではいない．

iii)．$\mathrm{grad}\, p$ が与えられれば，p は t にのみ依存する函数を除いて一意的に定まる．我々の議論においては，p は常に x に関して微分された形でのみ現れる．

§2. 非線型放物型方程式の解の解析性

Ω, I, Q, Γ は§1の通りとし，次の境界値問題を考える：

(2.1) $\partial_t v = F(\nabla_x^2 v, \nabla_x v, v, x, t)$ in Q,

(2.2) $v = 0$ on Γ.

方程式(2.1)が解析的放物型であることを仮定する，即ち，

(2.3) $(x,t)\in\overline{Q}$ に対して，$\partial F/\partial(\nabla_x^2 v)$ は正定値な行列である；

(2.4) F は $(x,t)\in\overline{Q}$ に対して，$\nabla_x^s v(x,t)$，$s=2,1,0$，及び x，t の値域において，それらの変数に関する解析函数である．

このとき，次が成り立つ：

<u>定理2</u>（[5]）．条件(2.3-4)の下で，問題(2.1-2)の解 $v\in C^\infty(\overline{Q})$ は，$\overline{Q}_\sigma$ 上で解析的である．ここで Q_σ は(1.4)で与えられ，σ は $0<\sigma<1$ を満たす任意の数である．

<u>注意</u>（[5]）．境界条件(2.2)は，Neumann 条件及び，Kinderlehrer-Nirenberg [4]の条件を含む様に一般化される．また問題(2.1-2)は，高階放物型方程式系で，その線型化が Solonnikov [11]の条件を満たすものに拡張される．

§3. 大域的に定義された vector fields

定理1及び2のいずれの場合にも，解の解析性はその逐次導函数に対する Cauchy 評価を導くことによって示される（その様な方法の典型的な例としては，[8] を見られたい）。まず側境界面 Γ に沿う方向の導函数の評価を，線型化された混合問題に対する先験不等式を用いて導く。我々の結果は x-変数に関して局所化できない（注意 4.2 及び 5.4 を見られたい）ので，$\overline{\Omega}$ 全体で定義された解析的な vector fields で，$\partial\Omega$ に接している様なものに沿う導函数を考える。

r は Ω の境界からの距離函数であって，Ω の内側で負，外側で正となる様に符号付けられているものとする。$\overline{\Omega}$ 上で定義された vector fields が $\partial\Omega$ に接しているとは，$\partial\Omega$ 上で，$Xr = 0$ を満たすときをいう。$\varepsilon > 0$ に対して，

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega ;\ r(x) < -\varepsilon\},\quad \Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$$

とおく。このとき，

<u>補題 3.1</u>. 任意の十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して，$\overline{\Omega}$ 上で定義されかつ解析的な有限個の vector fields $X_0, T_1, \cdots, T_{N'}, T_{N'+1}, \cdots, T_N$ が存在して，次の性質を持つ：

i). $T_1, \cdots, T_N$ は $\partial\Omega$ に接している；

ii). $\overline{\Omega}$ 上で解析函数 ξ_k, η_{jk} が存在して，

$$\partial/\partial x_k = \xi_k X_0 + \sum_{j=1}^{N} \zeta_{jk} T_j \quad \text{on } \overline{\Omega}, \qquad 1 \leqq k \leqq n;$$

iii). $\overline{\Omega}_\varepsilon$ 上で解析函数 ς_{jk} が存在して,

$$\partial/\partial x_k = \sum_{j=1}^{N'} \varsigma_{jk} T_j \qquad \text{on } \overline{\Omega}_\varepsilon, \qquad 1 \leqq k \leqq n.$$

iv). $\sum_{k=1}^{n} (\xi_k)^2 \neq 0 \qquad \text{on } \overline{\Omega^\varepsilon}.$

我々はこの補題 3.1 を証明しないが, その証明が次の事実に基くことだけを注意しておく.

<u>補題 3.2</u>. 任意の $x \in \Omega$ に対して, $\overline{\Omega}$ 上の解析函数 $\varphi_{(x)}$ が存在して, 次の性質を持つ:

i). $\varphi_{(x)} = 0, \quad d\varphi_{(x)} \neq 0 \qquad \text{on } \partial\Omega;$

ii). $\varphi_{(x)} \neq 0, \quad d\varphi_{(x)} \neq 0 \qquad \text{at } x.$

さて補題 3.1 における T_i, $1 \leqq i \leqq N$, に対して, $T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}$ の形の微分作用素を T^k と略記する. この様な略記が許されるのは, 非可換な vector fields の間の交換子に関する Leibniz 型の公式が, 我々の使う評価の範囲に限れば, 形式的には一変数の場合と同じ形をしているという事実に基く (例えば [9; pp. 575-576] を見られたい).

§4. 定理2の証明の概略

関係式(2.1-2)の両辺を t で微分すれば，

(4.1) $(\partial_t - L)\partial_t v = F_t$ in Q, $\partial_t v = 0$ on Γ

を得る．但しここで，$F_t = \partial F/\partial t$ であり，

$$L w = \sum_{s=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial(\nabla_x^s v)} \cdot \nabla_x^s w \quad \text{for} \quad w \in C^\infty(\bar{Q}).$$

式(4.1)の両辺に $T^k \partial_t^{j-1}$ を作用させて，

(4.2) $(\partial_t - L) T^k \partial_t^j v = f_{k,j}$ in Q, $T^k \partial_t^j v = 0$ on Γ

を得る．ここで，

(4.3) $f_{k,j} = [T^k \partial_t^{j-1}, L]\partial_t v + T^k \partial_t^{j-1} F_t$ for $j \neq 0$.

但し記号 $[A, B]$ は交換子 $AB - BA$ を表わす．$j = 0$ に対しても(4.3)と類似な式を得る．我々は $T^k \partial_t^j v$ を評価するために，次の混合問題に対する先験不等式を用いる：

(4.4 i) $(\partial_t - L) w = f$ in Q, (4.4 ii) $w = 0$ on Γ,

(4.5) $w = 0$ on $\{t = 0\} \cap \bar{Q}$.

<u>補題4.1</u>([11])．$w \in C^\infty(\bar{Q})$ が(4.4-5)を満たせば，w と f に依存しない正の定数 C が存在して，

$$[\![w]\!]_2 \leq C([\![f]\!]_0 + [\![w]\!]_0).$$

ここで $[\![w]\!]_0$ は w の $L^2(Q)$-norm であって，

$$[\![w]\!]_2 = [\![\partial_t w]\!]_0 + \sum_{s=0}^{2} [\![\nabla_x^s w]\!]_0 .$$

さて $w=T^k\partial_t^j v$ は初期条件(4.5)を満たさないから，(t-変数にのみ依存する) cut-off 函数を導入する．$\zeta_0\in C^\infty(\mathbb{R})$ を非増加函数で，

$$\zeta_0(t)=1 \quad \text{for} \quad t\le 0, \qquad \zeta_0(t)=0 \quad \text{for} \quad t\ge 1$$

を満たすものとする．$0<\sigma<1$ なる σ と，$m\in\mathbb{Z}_+$ が与えられたとし，次の様におく：

$$\zeta_{\sigma,m}(x,t)=\zeta_0(m(1-t/\sigma)) \qquad \text{for} \quad (x,t)\in\bar{Q},$$

$$\sigma_m=(1-1/m)\sigma \quad \text{for} \quad m\ge 1, \qquad \sigma_0=0.$$

このとき，

$$\text{(4.6)} \qquad \operatorname{supp}\zeta_{\sigma,m}\subset\bar{Q}_{\sigma_m}, \qquad \zeta_{\sigma,m}=1 \quad \text{in} \quad Q_\sigma,$$
$$|\partial_t^s\zeta_{\sigma,m}|\le C_s(m/\sigma)^s.$$

さて w が(4.4)を満たせば，$\zeta=\zeta_{\sigma,m}$ に対して，

$$\text{(4.7)} \qquad (\partial_t-L)(\zeta w)=\zeta f+(\partial_t\zeta)w \quad \text{in} \quad Q, \qquad \zeta w=0 \quad \text{on} \quad \Gamma$$

である．従って(4.6)より，$m\ge 2$ に対して，

$$\text{(4.8)} \qquad [\![\zeta w]\!]_2\le C([\![\zeta f]\!]_0+[\![\zeta w]\!]_0+(m/\sigma)[\![\tilde{\zeta}w]\!]_0)$$

が成り立つ．但しここで，$\tilde{\zeta}=\zeta_{\sigma_m,m-1}$ であり，C は m，σ，w，f に依存しない正の定数である．

<u>注意4.2</u>．x-変数にも依存する cut-off 函数 ζ を取れば，式(4.7)の右辺は $-[L,\zeta]w$ を含み，従って(4.8)の右辺に次の項が加わる：

$$(\sigma/m)^2 [\![\tilde{\zeta} w]\!]_0 + (\sigma/m) [\![\nabla_x (\tilde{\zeta} w)]\!]_0 .$$

従って，x-変数に関しても局所化した時には，t-変数に関する解の解析性は望めず，x-変数に関して解析的，t-変数に関しては Gevrey class of order 2 しか得られない（[4] を見られたい）．

法線方向の微分を含む導函数 $\partial_x^\ell T^k \partial_t^j v$ に対しても，(4.2) と同様な関係式

(4.9) $\qquad (\partial_t - L)\partial_x^\ell T^k \partial_t^j v = f_{\ell,k,j} \quad \text{in } Q$

を得る．ここで $f_{\ell,k,j}$ は (4.3) における $f_{k,j}$ と類似な量である．これらの導函数の評価は，次の補題を用いてなされる．

補題 4.3. $\zeta = \zeta_{\sigma,m}$ とする．$w \in C^\infty(\overline{Q})$ が (4.4 i) を満たせば，ζ，w，f に依存しない正の定数 C が存在して，

$$[\![\zeta \nabla_x^2 w]\!]_0 \le C \Big([\![\zeta f]\!]_0 + [\![\zeta \partial_t w]\!]_0 + [\![\zeta \nabla_x T w]\!]_0 + \sum_{s=0}^{1} [\![\zeta \nabla_x^s w]\!]_0 \Big).$$

多重添数 $\alpha = (\ell, k, j) \in \mathbb{Z}_+^3$ に対して，

$$a = |\alpha| = \ell + k + j, \quad D_\sigma^\alpha = \zeta_{\sigma,a} \partial_x^\ell T^k \partial_t^j \quad (0 < \sigma < 1)$$

とし，与えられた方程式 (2.1-2) の解 v に対して，

(4.10) $\qquad N_\sigma(\alpha) = (a-\mu)!^{-1} \sum_{s=0}^{1} (a/\sigma)^s [\![D_\sigma^\alpha v]\!]_{2-2s}$

とおく．但し，$\mu = [n/2] + 5$．さて v の解析性は次の条件 (I_m) から従う：

<u>条件</u> (I_m)：ある（m に依存しない）正の定数 M_s，$s = 0, 1, 2, 3$，が存在して，$a \leqslant m-1$ に対して

$$N_\sigma(\alpha) \leqslant M_0 M_\sigma(\alpha) \qquad \text{for} \quad 0 < \sigma < 1$$

が成り立つ．但しここで，

$$M_\sigma(\alpha) = (M_1/\sigma)^{(a-\mu)^+} M_2^k M_3^\ell, \qquad r_+ = \max(r, 0).$$

<u>注意</u>．実は今の場合には $M_2 = 1$ と取ることができ，M_2 は §5 においてはじめて本質的に必要となる．

線型方程式の場合と異なり，(4.2)，(4.9) の右辺は，解 v の導函数のいくつかの積を含む．これらを帰納的に評価するために，次の様な量を考える：

(4.11)
- i) v'' は $\nabla_x^s v$，$s = 0, 1, 2$，を表わす；
- ii) $\bar{F}(v'', x, t)$ は $F_{v''}$，F_x，F_T 又は F_t を表わす；
- iii) $\bar{F}_{(i)}(x, t)$ は $\bar{F}$ の，階数 i の任意な導函数の $(v''(x,t), x, t)$ における値を表わす．

多重添数 $\beta = (i; \alpha) \in \mathbb{Z}_+^4$ に対して，$b = |\beta| = i + a$ とし，(4.11) における $\bar{F}_{(i)}$ に対して次の様におく：

$$\bar{N}_\sigma(\beta) = (b-\mu)!^{-1} \| D_\sigma^\alpha \bar{F}_{(i)} \|_0 .$$

条件(I_m)の証明に補助的に用いられる次の条件を考える：

<u>条件</u>$(\bar{I}_m)$： ある正の定数$\bar{M}_0$, Kが存在して，$b \leq m-2$ に対して次の不等式が成り立つ：

$$\bar{N}_\sigma(\beta) \leq \bar{M}_0 K^i M_\sigma(\alpha) \qquad \text{for} \quad 0<\sigma<1 .$$

さて条件(I_m)は，次の2つの補題を組み合わせて帰納的に示される：

<u>補題 4.4</u>. 条件(I_m)と$(\bar{I}_m)$がある$m \geqq 2\mu+2$に対して成立すると仮定する．このときもし，

$$M_0/\bar{M}_0 + M_0 M_3^\nu / M_1 \ , \quad \text{但し } \nu = [n/2]+2,$$

が十分に小さければ，$(\bar{I}_{m+1})$が成立する．

<u>補題 4.5</u>. 条件(I_m)と$(\bar{I}_{m+1})$がある$m \geqq 2\mu+2$に対して成立すると仮定する．このときもし，

$$(4.12) \qquad \bar{M}_0 M_3^\nu / M_1 + 1/M_3$$

が十分に小さければ，(I_{m+1})が成立する．

上述の補題 4.4-5の証明は，*Leibniz* の公式と *Sobolev* の

不等式を用いてなされるが，それらは長すぎてここには述べることができない．

§5. 定理1の証明の概略

関係式$(1.1'-2)$の両辺をtで微分すれば，

$$(5.1)\qquad L(\partial_t v, \partial_t p) = (F_t, 0) \text{ in } Q, \qquad \partial_t v = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

を得る．但しここで，$(w, q) \in C^\infty(\bar{Q})$に対して，

$$L(w, q) = L_0(w, q) - (L'w, 0),$$

$$L_0(w, q) = ((\partial_t - \Delta)w + \mathrm{grad}\, q, \mathrm{div}\, w),$$

$$L'w = \frac{\partial F}{\partial(\nabla_x v)} \cdot \nabla_x w + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot w.$$

式(5.1)の両辺に$\partial_x^\ell T^k \partial_t^{j-1}$を作用させて，

$$L\partial_x^\ell T^k \partial_t^j (v, p) = (f^{(\ell,k,j)}, h^{(\ell,k,j)}) \text{ in } Q,$$

$$T^k \partial_t^j v = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

を得る．但しここで，$f^{(\ell,k,j)} = f_L^{(\ell,k,j)} + f_N^{(\ell,k,j)}$であり，

$$(5.2)\qquad h^{(\ell,k,j)} = -\partial_x^\ell [T^k, \mathrm{div}]\partial_t^j v,$$

$$f_L^{(\ell,k,j)} = \partial_x^\ell [T^k, \Delta]\partial_t^j v - \partial_x^\ell [T^k, \mathrm{grad}]\partial_t^j p,$$

$$(5.3)\qquad f_N^{(\ell,k,j)} = [\partial_x^\ell T^k \partial_t^{j-1}, L']\partial_t v + \partial_x^\ell T^k \partial_t^{j-1} F_t, \quad j \neq 0.$$

$j = 0$に対しても，(5.3)と類似な式を得る．さて(5.2)より特に，$h^{(\ell,0,j)} = 0$となることに注意しよう．このとき，

$$(w, q) = \partial_t^j (v, p),\ T^k \partial_t^j (v, p),\ \partial_x^\ell T^k \partial_t^j (v, p)$$

はそれぞれ，次の型の方程式を満たす：

(5.4) $L(w, q) = (g, 0)$ in Q, $w = 0$ on Γ,

(5.5) $L(w, q) = (g, h)$ in Q, $w = 0$ on Γ,

(5.6) $L(w, q) = (g, h)$ in Q.

我々は，これらの方程式の解に対する，次に述べる様な先験不等式を用いる．

補題 5.1. $(w, q) \in C^\infty(\bar{Q})$ は (5.4) を満たすとし，$\zeta = \zeta_{\sigma, m}$, $0 < \sigma < 1$, $m > 0$, とおく．このとき，

$$[\![\zeta w]\!]_2 + [\![\nabla_x \zeta q]\!]_0 \le C ([\![\zeta g]\!]_0 + [\![\zeta w]\!]_0 + [\![(\partial_t \zeta) w]\!]_0)$$

が成り立つ．ここで C は，w, q, g, ζ に依存しない正の定数である．

補題 5.2. $(w, q) \in C^\infty(\bar{Q})$ は (5.5) を満たすとし，$\zeta = \zeta_{\sigma, m}$ とおく．このとき，w, q, g, h, ζ に依存しない正の定数 C が存在して，

$$[\![\zeta w]\!]_2 + [\![\nabla_x \zeta q]\!]_0 \le C ([\![\zeta g]\!]_0 + [\![\zeta h]\!]_{1,(x)} + \sum_{s=0}^{1} [\![\zeta \partial_t^s w]\!]_0 + [\![(\partial_t \zeta) w]\!]_0)$$

が成り立つ．但しここで，$[\![h]\!]_{1,(x)} = \sum_{s=0}^{1} [\![\nabla_x^s h]\!]_0$．

補題 5.3. $(w, q)\in C^\infty(\bar{Q})$ は (5.6) を満たすとし，$\zeta=\zeta_{\sigma,m}$ とおく．このとき，w, q, g, h, ζ に依存しない正の定数 C が存在して，

$$\|[\zeta w]\|_2+\|[\nabla_x \zeta q]\|_0 \leq C\ \Big(\|[\zeta g]\|_0+\|[\zeta h]\|_{1,(x)} + \sum_{s=0}^{1}\|[\zeta \partial_t^s w]\|_0+\|[(\partial_t \zeta) w]\|_0+\mathcal{E}\Big)$$

が成り立つ．但しここで，補題 3.2 における T_1, ..., T_N に対して，

$$\mathcal{E}=\sum_{s=1}^{N}\left(\|[\zeta T_s w]\|_{1,(x)}+\|[\zeta T_s q]\|_0\right)+\|[\zeta w]\|_{1,(x)} .$$

補題 5.1 は本質的には Solonnikov による（[10]，[12]）．補題 5.2-3 は，Navier-Stokes 方程式に対する定常問題が楕円型系であることから，[1] の評価を用いることにより従う．

注意 5.4. $\zeta=\zeta_{\sigma,m}$ を，x-変数にも依存する cut-off 函数とする．このとき，

(5.7) $$[\mathrm{grad}, \zeta]\, q = q\ \mathrm{grad}\ \zeta$$

である．従って $q=\partial_t^j p$ とおくと，(5.7) において p は x-変数に関して微分されていない．このことから，x-変数に関しても局所化した場合，注意 4.2 に対応する結果，即ち，x-変数に関して境界まで込めて解析的，t-変数に関して Gevrey class of order 2，すらも期待できない様に思われる．

方程式(1.1′-2)の解$(v, \mathrm{grad}\, p) \in C^\infty(\overline{Q})$の解析性は，§4における条件$(I_m)$を帰納的に証明することによって示される．但しここで，(4.10)に対応して，

$$N_\sigma(\alpha) = (a-\mu)!^{-1}([[D_\sigma^\alpha v]]_2 + [[\nabla_x D_\sigma^\alpha p]]_0).$$

補助的な条件$(\overline{I}_m)$も，$\overline{N}_\sigma(\beta)$と共に，§4における形で用いられる．但し，(4.11)に対応して次の様におく：

i) v'は$\nabla_x^s v$，$s=0, 1$，を表わす；

ii) $\overline{F}(v', x, t)$は$F_{v'}$，F_x，F_T 又は F_t の任意の成分を表わす；

iii) $\overline{F}_{(i)}(x, t)$は$\overline{F}$の，階数iの任意な導函数の$(v'(x,t), x, t)$における値を表わす．

さらに，補題4.4-5はそのままの形で用いられる．但し，(4.12)は次の様に変える必要がある：

$$\overline{M}_0 M_3^{\nu} / M_1 + 1/M_2 + M_2/M_3 .$$

引用文献

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I and II, Comm. Pure Appl. Math., 12(1959), 623-727 and 17(1964), 35-92.

[2] S. Itô, The existence and the uniqueness of regular solution of non-stationary Navier-Stokes equation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1, 9(1961), 103-140.

[3] C. Kahane, On the spatial analyticity of solutions of the Navier-Stokes equations, Arch. Rat. Mech. Anal., 33(1969), 386-405.

[4] D. Kinderlehrer and L. Nirenberg, Analyticity at the boundary of solutions of nonlinear second-order parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 31(1978), 283-338.

[5] G. Komatsu, Analyticity up to the boundary of solutions of nonlinear parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 32(1979), 669-720.

[6] G. Komatsu, Global analyticity up to the boundary of solutions of the Navier-Stokes equation, Comm. Pure Appl. Math., 33(1980), in press.

[7] K. Masuda, On the analyticity and the unique continuation

theorem for solutions of the Navier-Stokes equation, Proc. Japan Acad., 43(1967), 827-832.

[8] C.B. Morrey, Jr. and L. Nirenberg, On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 10(1957), 271-290.

[9] E. Nelson, Analytic vectors, Ann. of Math., 70(1959), 572-615.

[10] V.A. Solonnikov, Estimates of the solutions of a non-stationary linearized system of Navier-Stokes equations, Trudii Mat. Inst. Steklov, 70(1964), 213-317; Engl. transl. in A.M.S. Transl. Series 2, 75(1968), 1-116.

[11] V.A. Solonnikov, On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general type, Trudii Mat. Inst. Steklov, 83(1965); Engl. transl. A.M.S. in Boundary value problems of mathematical physics, III, ed. by O.A. Ladyzhenskaja, 1967.

[12] V.A. Solonnikov, Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI)38(1973), 153-231; Engl. transl. in J. Soviet Math., 8(1977) 467-529.