

非2進整数環上の直交群について

神戸大学 理学部 味村良雄

0. 非2進局所体上の二次空間内の格子 L の単数群を $O(L)$ とかくとき、 $O(L) \subset O(M)$ をみたす格子 M はどのように特徴づけられるか？ 剰余類体が5個以上の要素を含むとき、Riehm ([3], 定理5.2)はこの問に答えている。一般の場合は、Kallman-Kneser-Stuhler ([1], 定理2, 3)が答えている。ここでは、後者の結果を変形した形での β (定理1), 更に次の問に答える (定理2) : $O(L) = O(M)$ をみたす格子 M はどのように特徴づけられるか？

1. F を非2進局所体とする。則ち、非自明な完備離散付値をもつ体で、 \mathcal{O}/\mathfrak{p} は標数2でない有限体である。但し、 \mathcal{O} は F の整数環、 \mathfrak{p} は \mathcal{O} のただ一つの極大イデアルである。 V を F 上の正則二次空間、 B, Q をそれぞれ対称双一次形式、二次形式とする。 V の直交群を $O(V)$ とかく。 L を V 内の格子とする、則ち V 内の有限生成 \mathcal{O} -加群で $FL = V$ をみたすものである。 L は \mathcal{O} 上の基底をもつ。更に非2進性より、 L は

2

直交基底, $\{x_1, \dots, x_n\}$ とかく, をもつ. $a_i = Q(x_i)$ として

$$L = [x_1, \dots, x_n] \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$$

とかく, L の単射群 $O(L)$ は次で定義される:

$$O(L) = \{ \sigma \in O(V) : L\sigma = L \}.$$

L の部分加群 L_1, L_2 があって, $L = L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{0\}$,

$B(L_1, L_2) = \{0\}$ をみたしている時, $L = L_1 \perp L_2$ とかく. L_i は

二次空間 FL_i の格子になつてゐるので $O(L_i)$ は直交群 $O(FL_i)$

の部分群として定まり, 次の同一視によつて $O(V)$ の部分群

でもある. $O(FL_i) = \{ \sigma \in O(V) : x\sigma = x \text{ for } \forall x \in FL_i \}.$

$\rho = \pi\sigma$ とし, σ の単射群を \mathcal{U} とかく. 格子 L を直交基底によつて上の形に表わしたとき, すべての i について, $a_i \in \pi^r \mathcal{U}$ のとき, L は ρ^r -modular であるという ([2]: 82G).

格子 L の双対格子 L^* を次で定義する:

$$L^* = \{ x \in V : B(x, L) \subset \mathcal{O} \}.$$

明らかに, $L^{**} = L$, $(\sigma L)^* = \sigma^r L^*$ が成立する. ただし, σ は F の分数イデアル. 次の補題 1, 2 は容易に分る.

補題 1. L, M を V 内の格子で $O(L) \subset O(M)$ とする. $L = L_1 \perp L_2$ ならば, $O(L_i) \subset O(M_i)$ であり, $M = M_1 \perp M_2$ である.

但し, $M_i = M \cap FL_i$, $i=1, 2$.

補題 2. $O(L) = O(L^{\#}) = O(\sigma L)$

格子 L は、いわゆる Jordan 分解 $L = L_1 \perp \dots \perp L_m$ をもつ。ここで、各 L_i は β^{r_i} -modular であり、 $r_1 < r_2 < \dots < r_m$ とする ([2]; 91C)。2つの Jordan 分解 $L = L_1 \perp \dots \perp L_m = L'_1 \perp \dots \perp L'_m$ に対して、 $m = m'$ 、 $r_i = r'_i$ が成立し、 $L'_i = L_i \sigma$ ($i=1, \dots, m$) となる $\sigma \in O(L)$ が存在する ([2]; 91:9, 92:2)。 L の Jordan 分解 $L = L_1 \perp \dots \perp L_m$ に関して、 $x \in V$ は次の形に一意的に表ける：

$$x = \sum_{i=1}^m \pi^{e_i} x_i$$

ここで、 x_i は L_i の原始的要素であり、 e_i は有理整数又は ∞ である。但し、 $\pi^\infty = 0$ とみ直す。この表現を標準表現としよう。

$x \in V$ が $Q(x) \neq 0$ のとき、次で定まる写像 τ_x は $O(V)$ の要素となる：

$$\tau_x : y \rightarrow y - \frac{2B(x, y)}{Q(x)} x$$

非2進性より $O(L)$ は $\{\tau_x ; \tau_x \in O(L)\}$ で生成されることかわかる ([2]; 92:4)。 $\tau_x \in O(L)$ であるための条件を求めよう。

補題3 $L = L_1 \perp \dots \perp L_m$ を Jordan 分解とし、 L_i は β^{r_i} -modular とする。 $x = \sum_{i=1}^m \pi^{e_i} x_i$ を標準表現とする。このとき、 $\tau_x \in O(L)$ であるための必要十分条件は、次をみたす k が存在することである： $Q(x_k) \sigma = \beta^{r_k}$ 、 $e_i \geq e_k$ 、 $e_i + r_i \geq e_k + r_k$ ($i=1, \dots, m$)。

(証明) $\tau_x \in O(L)$ とせよ。故に、 $\frac{B(x, L)}{Q(x)} x \subset L$ 、則ち、任意の i, j に対して、 $\frac{B(x, L_i)}{Q(x)} \pi^{e_j} x_j \subset L_j$ 。従って $\beta^{r_i + e_i + e_j} \subset Q(x) \sigma$ 。

今, $2e_k + \gamma_k = \min \{2e_i + \gamma_i ; i=1, \dots, m\}$ とおく. $Q(x) = \sum \pi^{2e_i} Q(x_i)$
 $\in \sum \mathfrak{f}^{2e_i + \gamma_i} = \mathfrak{f}^{2e_k + \gamma_k}$ だから, $\mathfrak{f}^{\gamma_i + e_i + e_j} \subset \mathfrak{f}^{2e_k + \gamma_k}$ となり, 従って
 $\gamma_i + e_i + e_j \geq 2e_k + \gamma_k$ 及び $Q(x)\sigma = \mathfrak{f}^{2e_k + \gamma_k}$ を得る. これか
ら, $e_i + \gamma_i \geq e_k + \gamma_k$, $e_j \geq e_k$ が出る. $\gamma_k < \gamma_i$ ならば, $Q(\pi^{e_i} x_i)$
 $\in \mathfrak{f}^{\gamma_i + 2e_i} \subset \mathfrak{f}^{\gamma_i + 2e_k} \subsetneq \mathfrak{f}^{\gamma_k + 2e_k}$ となり, $\gamma_k > \gamma_i$ ならば, $Q(\pi^{e_i} x_i) \in \mathfrak{f}^{\gamma_i + 2e_i}$
 $\subset \mathfrak{f}^{\gamma_i + 2(e_k + \gamma_k - \gamma_i)} \subsetneq \mathfrak{f}^{\gamma_k + 2e_k}$ となる. $\mathfrak{f}^{2e_k + \gamma_k} = Q(x)\sigma = \sum Q(\pi^{e_i} x_i)\sigma$
より $Q(x)\sigma = \mathfrak{f}^{\gamma_k}$ が得られる. 逆も同様の論法で分る.

σ/\mathfrak{f} が 3 個の要素からなる体のときに, 次のような 2 次元
格子を考え, これを双曲格子といたう.

$$H = [x, y] \cong \langle a, -a \rangle.$$

$a\sigma = \mathfrak{f}^r$ のとき, 上の双曲格子 H に対して,

$$H^+ = \{z \in H ; Q(z)\pi^r \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}\} \cup \mathfrak{f}H$$

$$H^- = \{z \in H ; Q(z)\pi^r \equiv -1 \pmod{\mathfrak{f}}\} \cup \mathfrak{f}H$$

なる格子 H^+ , H^- を定義する. $\pi^r a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ のとき, $H^+ = [x, \pi y]$,
 $H^- = [\pi x, y]$ となり, $\pi^r a \equiv -1 \pmod{\mathfrak{f}}$ のとき, $H^+ = [\pi x, y]$, $H^- =$
 $[x, \pi y]$ となる. また $H^{++} = \mathfrak{f}^{-r-1}H^-$ となる. 直接計算によつて
次の補題が成立することになる.

補題 4. 双曲格子 H に対して, $O(H) = O(H^+) = O(H^-)$.

一般に 2 つの格子 L, M に対して, $L = \sigma M$ となる分数イ
デアル σ があるとき, $L \sim M$ とかく.

命題 1 L が V 内の modular 格子, M が V 内の格子のとき,
 $O(L) \subset O(M)$ ならば, $M \sim L$, $M \sim L^+$ または $M \sim L^-$ である。

(証明) $n = \dim V$ とする。 $n=1$ の時は容易である。 $n \geq 2$ とする。
 $L = [x_1, \dots, x_n] \cong \langle \pi^r \varepsilon_1, \dots, \pi^r \varepsilon_n \rangle$, $\varepsilon_i \in \mathcal{N}$ とかける。 補題 1
 によって, $M = \sigma_1 x_1 + \dots + \sigma_n x_n$ とかける。 ただし, σ_i は F の分
 数イテアル。 $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in L$, $Q(x)\sigma = \mathfrak{p}^r$ とする。 明らかに, τ_x
 $\in O(L)$ となるので, $\tau_x \in O(M)$ である。 故に $\frac{B(x, M)}{Q(x)} x \in M$, 則ち
 $a_i \sigma_i \pi^r \varepsilon_i a_j \subset Q(x) \sigma_j$. 故に $a_i a_j \sigma_i \subset \sigma_j$ が任意の i, j に対し
 て成り立つ。 $n \geq 3$ とせよ。 $x = x_i + x_j + a_k x_k$ を考える。 但し,
 i, j, k は互いに相異なる。 $a_k = 0$ 又は $a_k = 1$ ととって, $Q(x)\sigma$
 $= \mathfrak{p}^r$ とできる。 従って $\sigma_i = \sigma_j$ となる。 則ち $M \sim L$ である。 次
 に $n=2$ とせよ。 $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 \in L$ を考える。 $a_1, a_2 \in \mathcal{N}$ で
 $Q(x)\sigma = \mathfrak{p}^r$ が成り立てば $\sigma_1 = \sigma_2$ とえられる。 則ち $M \sim L$ であ
 る。 任意の $a_1, a_2 \in \mathcal{N}$ に対して $a_1^2 \varepsilon_1 + a_2^2 \varepsilon_2 \in \mathfrak{p}$ ならば, 任意
 の $a \in \mathcal{N}$ に対して $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + a^2 \in \mathfrak{p}$ となり, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \equiv -1 \pmod{\mathfrak{p}}$ 且つ
 $a^2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ ($\forall a \in \mathcal{N}$)。 これから \mathcal{O}/\mathfrak{p} は 3 個の要素から成り
 L は双曲型となる。 $a_1 = 1, a_2 = \pi$ ととって $\pi \sigma_1 \subset \sigma_2$. 同様に,
 $\pi \sigma_2 \subset \sigma_1$. 故に $\sigma_2 = \mathfrak{p} \sigma_1$, $\sigma_2 = \sigma_1$ 又は $\sigma_2 = \mathfrak{p} \sigma_1$ となり,
 $M \sim L$, $M \sim L^+$ 又は $M \sim L^-$ となる。

[1]の結果を次の形で述べよう。

定理 1 $L = L_1 \perp \dots \perp L_m$ を Jordan 分解, L_i は \mathfrak{f}^{γ_i} -modular とする. $O(L) \subset O(M)$ となるための必要十分条件は次の (#) の成立することである:

$$(\#) \left\{ \begin{array}{l} M = \mathfrak{f}^{t_1} M_1 \perp \dots \perp \mathfrak{f}^{t_m} M_m, \\ t_i \geq t_j'', \quad t_i'' + \gamma_i \leq t_j + \gamma_j \quad \text{if } \gamma_i < \gamma_j, \\ M_i \in \{L_i, L_i^+, L_i^-\}, \\ t_i'' = \begin{cases} t_i & (M_i = L_i \text{ のとき}) \\ t_{i+1} & (M_i \neq L_i \text{ のとき}) \end{cases} \end{array} \right.$$

(証明) $O(L) \subset O(M)$ とせよ. 補題 1 と命題 1 によって, $M = \mathfrak{f}^{t_1} M_1 \perp \dots \perp \mathfrak{f}^{t_m} M_m$, $M_i \in \{L_i, L_i^+, L_i^-\}$, とかける. $k \in \{1, \dots, m\}$ をとり, $Q(x_k) \circ = \mathfrak{f}^{\gamma_k}$ となる $x_k \in L_k$ をとる. 更に, $M_k \neq L_k$ の時は $x_k \notin M_k$ であるとしておく. 従って, $a x_k \in M$ と $a \in \mathfrak{f}^{t_k''}$ は同値となる. $e_i = \max\{0, \gamma_k - \gamma_i\}$, $i = 1, \dots, m$, とおく. 各 $i (\neq k)$ に対して, $B(x_i, M_i) = \mathfrak{f}^{\gamma_i}$ となる $x_i \in L_i$ が存在する. $x = \sum_{i=1}^m \pi^{e_i} x_i$ とおくと, 補題 3 によって, $\tau_x \in O(L)$, $Q(x) \circ = \mathfrak{f}^{\gamma_k}$ となる. 故に, $\tau_x \in O(M)$, 則ち $\frac{B(x, \mathfrak{f}^{t_i} M_i)}{Q(x)} \pi^{e_i} x_i \subset \mathfrak{f}^{t_k} M_k \subset M$. 従って, 任意の $i (\neq k)$ に対して, $e_i + t_i + \gamma_i - \gamma_k + e_k \geq t_k''$ を得る. $\gamma_i > \gamma_k$ ならば, $e_i = e_k = 0$, つまり $t_i + \gamma_i \geq t_k'' + \gamma_k$. $\gamma_i < \gamma_k$ ならば, $e_i = \gamma_k - \gamma_i$, $e_k = 0$, つまり $t_i \geq t_k''$. 次に十分性を示そう. $\tau_x \in O(L)$ とし, $x = \sum_{i=1}^m \pi^{e_i} x_i$ を与えられた Jordan 分解に関する標準表現とする. 3頁にのべたことより, $\tau_x \in O(M)$ を示せば十分であ

る。補題 2 によつて, $Q(x_k)\sigma = \rho^{r_k}$, $e_i \geq e_k$, $e_i + r_i \geq e_k + r_k$, ($i = 1, \dots, m$) をみたす k が存在する。この時, 補題 2 の証明と同じようにして, $Q(x)\sigma = \rho^{2e_k + r_k}$ となる。任意の i, j について $B(x_i, M_i) \rho^{e_i + t_i - 2e_k - r_k + e_j - t_j} x_j \subset M_j$ を示せば十分である。 $i = j = k$ のとき, $B(x_k, M_k) = \rho^{r_k}$ (または $\rho^{r_k + 1}$) が $x_k \in M_k$ (または $x_k \notin M_k$) の時成立し, $a x_k \in M_k \Leftrightarrow a \in \sigma$ (または $a \in \rho$) が $x_k \in M_k$ (または $x_k \notin M_k$) の時成立することより, 上のことが分る。 $i = j = k$ でない時, $B(x_i, M_i) \subset \rho^{r_i}$ より, $e_i + e_j + r_i + t_i - r_k - 2e_k - t_j \geq 0$ を示せば十分である。 $i < j$, $i = j$, $i > j$ に分けて, k のとり方を考慮すれば, 上のことが分る。

2. 2つの (V 内の)格子 L, M に対して, M が L -線型であるとは, L の任意の Jordan 分解 $L = L_1 \perp \dots \perp L_m$ に対して, M が, $M = \sum_{i=1}^m \rho^{t_i} L_i$ とかける時であると定義する。

命題 2. L, M を V 内の格子とし, $L = L_1 \perp \dots \perp L_m$ を L の Jordan 分解, L_i は ρ^{r_i} -modular, $r_1 < r_2 < \dots < r_m$ とする。

(1) M が L -線型ならば $O(L) \subset O(M)$ である,

(2) M が L -線型ならば, $M = \sum_{i=1}^m \rho^{t_i} L_i$ と表わしたときの指数 t_1, \dots, t_m は L の Jordan 分解のとり方によらずに決まる。

(3) $M = \sum_{i=1}^m \rho^{t_i} L_i$ の時, M が L -線型であるための必要十分条件は $t_1 \geq \dots \geq t_m$, $t_1 + r_1 \leq \dots \leq t_m + r_m$ である。

(4) M が L -線型且つ L が M -線型であるための必要十分

条件は, $L \sim M$ または $L^\# \sim M$ であることである.

(証明) $m \geq 2$ の時示せば十分である. $M = \sum_{i=1}^m \rho^{t_i} L_i$ が L -線型であるとせよ. $L_1 = [x_1, \dots, x_s]$, $L_2 = [y_1, \dots, y_t]$ とせよ. $a = Q(y_1)/Q(x_1)$ とおく. $L'_1 = [x_1 + y_1, x_2, \dots, x_s]$, $L'_2 = [y_1 - ax_1, y_2, \dots, y_t]$ は, それぞれ, ρ^{r_1} , ρ^{r_2} modular であり, $L = L'_1 \perp L'_2 \perp L_3 \perp \dots \perp L_m$ は L の Jordan 分解となる. 従って $M = \rho^{s_1} L'_1 \perp \rho^{s_2} L'_2 \perp \rho^{s_3} L_3 \perp \dots \perp \rho^{s_m} L_m$ とかける. M の 2 つの表現を比べて, $s_1 = t_1$, $s_2 = t_2$, $t_1 \geq t_2$, $t_1 + r_1 \leq t_2 + r_2$ を得る. 同じことをくり返して, $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_m$, $t_1 + r_1 \leq t_2 + r_2 \leq \dots \leq t_m + r_m$ となる. (3) の必要条件を示された. 次に, $L^r = \{x \in L; B(x, L) \subset \rho^r\}$ と定めると, $L^{r_i} = \rho^{r_i - r_1} L_1 \perp \dots \perp \rho^{r_i - r_{i-1}} L_{i-1} \perp L_i \perp \dots \perp L_m$ だから, $B(L^{r_i}, M) = \rho^{r_i + t_i}$ を得る. これによって, (2) が示されたことになる. 任意の $\sigma \in O(L)$ について, $L = L\sigma = \sum_{i=1}^m L_i\sigma$ も L の Jordan 分解故, (2) によって, $M = \sum_{i=1}^m \rho^{t_i} L_i\sigma (= M\sigma)$ とかける. (1) が示された. 次に (3) の十分性を示す. 定理 1 により, $O(L) \subset O(M)$ となる. 3 頁での述べたことから, L の Jordan 分解は, 適当な $\sigma \in O(L)$ を用いて, $L = \sum_{i=1}^m L_i\sigma$ とあらわされる. 故に $M = M\sigma = \sum_{i=1}^m \rho^{t_i} L_i\sigma$ となり M は L -線型となる. 最後に (4) を示す. 十分性は明らかである. 今, L は M -線型, M は L -線型とする. $M = \sum_{i=1}^m \rho^{t_i} L_i$ とかけ, (3) より $t_1 \geq \dots \geq t_m$, $t_1 + r_1 \leq \dots \leq t_m + r_m$ である. M のこの分解で, modular 成分を適当にまとめると, M の Jordan 分

解かえられる。($\rho^{t_i} L_i$ は $\rho^{2t_i + \gamma_i}$ -modular であることに注意。) $\rho^{t_i} L_i$ と $\rho^{t_j} L_j$ が同じ modular ならば, L が M -線型であることより, $L = \rho^s (\rho^{t_i} L_i \perp \rho^{t_j} L_j \perp \dots) \perp \dots$ となり $s + t_i = s + t_j = 0$ より $t_i = t_j$, 従って $2t_i + \gamma_i = 2t_j + \gamma_j$ より $\gamma_i = \gamma_j$ となる. これから $M = \rho^{t_1} L_1 \perp \dots \perp \rho^{t_m} L_m$ は Jordan 分解であることが分り, $L = \rho^{-t_i} (\rho^{t_i} L_i) \perp \dots \perp \rho^{-t_m} (\rho^{t_m} L_m)$ と (3) より, $-t_i \geq -t_j$, $-t_i + (2t_i + \gamma_i) \leq -t_j + (2t_j + \gamma_j)$ が $2t_i + \gamma_i < 2t_j + \gamma_j$ の時成立する. 則ち任意の i, j に対して, $t_i = t_j$ か $t_i + \gamma_i = t_j + \gamma_j$ が成立する. 任意の i, j に対して $t_i + \gamma_i = t_j + \gamma_j$ が成立すれば $L^* \sim M$ である. $t_s = t_k$, $s \neq k$, とする s, k があれば, $i \neq s$, $i \neq k$ なる i に対して $t_i + \gamma_i \neq t_s + \gamma_s$ か $t_i + \gamma_i \neq t_k + \gamma_k$ が成立しなければならぬ ($t_s + \gamma_s \neq t_k + \gamma_k$ 故) ので, $t_i = t_s$ か $t_i = t_k$ となり, 結局 $t_i = t_s$ が任意の i に対して成り立つ. 則ち $L \sim M$ である.

補題 5 $\dim V = 2$ とせよ. L, M を V 内の格子とする. このとき, $O(L) = O(M)$ であるための必要十分条件は, 次のうちの一つが成り立つことである: $L \sim M$, $L^* \sim M$, $L^+ \sim M$, $L^- \sim M$, $L \sim M^+$, $L \sim M^-$.

(証明) 補題 2 と 4 から十分性が分る. 必要性は, L か M が modular の時は命題 1 によって, そうでない時は, 命題 2 (4) によって分る.

補題 6 L, M を V 内の格子, $L = [x_1, \dots, x_n]$, $Q(x_i)\sigma = \rho^{r_i}$ とする. $O(L) = O(M)$ とせよ. $r_1 \geq r_2 + 3$ ならば $L \sim M$ か $L \sim M^\#$ である.

(証明) 補題 1 によつて, $M = \rho^{t_1}x_1 + \dots + \rho^{t_n}x_n$, $O([x_i, x_j]) = O([\pi^{t_i}x_i, \pi^{t_j}x_j])$ となる. 補題 5 により, 次の一つが成り立つ. (1) $t_i = t_j$, (2) $t_i + r_i = t_j + r_j$, (3) $r_i = r_j$, $t_i - t_j = \pm 1$, (4) $r_i + 2t_i = r_j + 2t_j$, $t_i - t_j = \pm 1$.

$r_1 - r_2 \geq 3$ より, $t_1 = t_2$ か $t_1 + r_1 = t_2 + r_2$ となる. 後者のとき, M の代りに $M^\#$ を考へて, $t_1 = t_2$ として十分である. $t_3 \neq t_1$ として矛盾を出せば, $t_1 = \dots = t_n$ となり $L \sim M$ となる. 上の条件より, 次の一つが成り立つ:

$$(a1) \quad t_1 + r_1 = t_3 + r_3, \quad (a2) \quad r_1 = r_3, \quad t_1 - t_3 = \pm 1,$$

$$(a3) \quad r_1 + 2t_1 = r_3 + 2t_3, \quad t_1 - t_3 = \pm 1,$$

同様にして, 次の一つが成り立つ:

$$(b1) \quad t_2 + r_2 = t_3 + r_3, \quad (b2) \quad r_2 = r_3, \quad t_2 - t_3 = \pm 1,$$

$$(b3) \quad r_2 + 2t_2 = r_3 + 2t_3, \quad t_2 - t_3 = \pm 1.$$

(a i) と (b j) を組み合せて, 1) どれも矛盾に至る.

次に, 指数 r の重双曲格子を次で定義する:

$$D = H_1 \perp \rho H_2,$$

ここで H_1, H_2 はそれぞれ ρ^{-1} -modular な双曲格子である.

重双曲格子 D に対して、次のような D^+ , D^- を考える:

$$D^+ = (\{z \in D; Q(z)\pi^{-r} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}\} \cup \mathfrak{p}D) \\ + (\{z \in \mathfrak{p}^r D^\#; Q(z)\pi^{-r} \equiv -1 \pmod{\mathfrak{p}}\} \cup \mathfrak{p}^{r+1} D^\#),$$

$$D^- = (\{z \in D; Q(z)\pi^{-r} \equiv -1 \pmod{\mathfrak{p}}\} \cup \mathfrak{p}D) \\ + (\{z \in \mathfrak{p}^r D^\#; Q(z)\pi^{-r} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}\} \cup \mathfrak{p}^{r+1} D^\#)$$

簡単な計算によって、 $D = H_1 \perp \mathfrak{p}H_2$ のとき、 $D^+ = H_1^+ \perp H_2^-$,
 $D^- = H_1^- \perp H_2^+$ となることが分る。また次々成り立つ。

補題 7 D を指数 r の重双曲格子とすると、 $\mathfrak{p}^r D^\#, D^+, D^-$ も指数 r の重双曲格子となる。更に

$$(1) D^{++} = D^{--} = D, D^{+-} = D^{-+} = \mathfrak{p}^r D^\#, D^{+\#} = \mathfrak{p}^r D^-, D^{-\#} = \mathfrak{p}^r D^+,$$

$$(2) O(D) = O(\mathfrak{p}^r D^\#) = O(D^+) = O(D^-).$$

(証明) $D = H_1 \perp \mathfrak{p}H_2$ とかくと $\mathfrak{p}^r D^\# = H_2 \perp \mathfrak{p}H_1$, $H_1 = [x, y] \cong \langle \pi^{r-1}, -\pi^{r-1} \rangle$, $H_2 = [u, v] \cong \langle \pi^{r-1}, -\pi^{r-1} \rangle$ として、 $D^+ = H_1^+ \perp H_2^- = [x, \pi y] \perp [\pi u, v] = [x, v] \perp \mathfrak{p}[u, y]$. 従って D^+ も指数 r の重双曲格子となる。 D^- に対しても同様。(1)は、この表し方で計算すればよい。(2)は定理1によって分る。

J_1, J_2 は $FJ_1 = FJ_2$ 内の格子とする。 J_1 と J_2 を指数 r の同類であるとは、指数 r の重双曲格子 D で

$$D = J_1 \perp \dots, D' = J_2 \perp \dots, D, D' \in \{D, D^+, D^-, \mathfrak{p}^r D^\#\}$$

をみたすものがある時をいう。

命題 3 L, M を V 内の格子とし, M は L -線型でないとする. このとき, $O(L) = O(M)$ であるための必要十分条件は, 次の一つが成立することである:

(1) $L \sim H_1^+ \perp H_2$, $M \sim \phi H_1 \perp H_2''$, ただし, H_1, H_2 はそれぞれ, ϕ^{r-1} , ϕ -modular な双曲格子であり, H_2'' は H_2^+ か H_2^- を表わす.

(2) $L \sim K \perp J_1$, $M \sim K \perp J_2$, ただし, K は ϕ -modular, J_1, J_2 は指数 r の同類である.

(証明) 定理 1 と補題 7 (4) によって十分性は分る. 必要性を示す. 補題 6 によって, L の Jordan 分解は次の形をもつ:

$$L = L_{r-1} \perp L_r \perp L_{r+1}$$

但し, L_i は ϕ^i -modular か $\{0\}$ である. 定理 1 により

$$M = \phi^s M_{r-1} \perp \phi^t M_r \perp \phi^k M_{r+1}$$

但し, $M_i \in \{L_i, L_i^+, L_i^-\}$, とかける. M が L -線型でないことより, $M_i \neq L_i$ となる $i \in \{r-1, r, r+1\}$ がある. 今, $M_{r-1} \neq L_{r-1}$ 且つ $M_r \neq L_r$ ならば, M はその Jordan 分解の中に, 少なくとも 4 つの modular 成分をもち, 補題 6 から $M \sim L$ 又は $M \sim L^*$ となって, M が L -線型であることに反する. 従って次の 4 つの内の一つが成り立つとしてよい.

(i) $M_r \neq L_r$, $M_{r-1} = L_{r-1} \neq \{0\}$, $M_{r+1} = L_{r+1} \neq \{0\}$,

(ii) $M_r = L_r$, $M_{r-1} \neq L_{r-1}$, $M_{r+1} \neq L_{r+1}$,

$$(iii) \quad M_r = L_r, \quad M_{r-1} = L_{r-1}, \quad M_{r+1} \neq L_{r+1},$$

$$(iv) \quad M_r = L_r, \quad M_{r-1} \neq L_{r-1}, \quad M_{r+1} = L_{r+1}$$

先ず (i) の時, 定理 1 から, $s = k+1, t = k$ となり,

$$\mathfrak{f}^k M = \theta x \perp \mathfrak{f}(L_{r-1} + \mathfrak{f}^1 L_{r+1}) \perp \mathfrak{f} y$$

は $\mathfrak{f}^k M$ の Jordan 分解を与えろ。但し $L_r = [x, y]$ とする。定理 1 によつて, $L = \theta x \perp \mathfrak{f}^1 \mathfrak{f}(L_{r-1} \perp L_{r+1}) \perp \mathfrak{f}^1 \mathfrak{f} y$ を考へて, $L_{r-1} \perp \mathfrak{f}^1 L_{r+1}$ は双曲格子でなければならぬ。故に (i) なり。

(ii) の時, 定理 1 により, $i = j = k+1$ となり,

$$\mathfrak{f}^i M = [x, v] \perp L_r \perp \mathfrak{f}[y, u]$$

は $\mathfrak{f}^i M$ の Jordan 分解を与えろ。但し, $L_{r-1} = [x, y] \cong \langle \pi^{r-1} \varepsilon, -\pi^{r-1} \varepsilon \rangle$
 $L_{r+1} = [\pi u, \pi v] \cong \langle \pi^{r+1} \eta, -\pi^{r+1} \eta \rangle$, $\varepsilon, \eta \in \mathcal{W}$ 。上と同様にして,
 $L = [x, \pi v] \perp L_r \perp \mathfrak{f}^1 \mathfrak{f}[y, \pi u]$ より, $[x, v]$ と $[y, u]$ は双曲的
 でなければならぬ。従つてまた, $\varepsilon \eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ である。これは,
 $K = L_r, J_1 = [x, y] \perp \mathfrak{f}[u, v], J_2 = [x, v] \perp \mathfrak{f}[y, u]$ とし
 て (2) を与えろ。(iii) の時, $L_{r-1} \neq \{0\}$ ならば $i = k+1$ か $i = k+2$
 となるので, 後者なら M の代りに M^* を用いることによつて,
 $i = k+1$ としてよい。従つて $L_r \neq \{0\}$ なら $j = k+1$ である。

$$\mathfrak{f}^k M = (L_{r-1} + \theta x) \perp L_r \perp \mathfrak{f} y$$

は $\mathfrak{f}^k M$ の Jordan 分解である。但し $L_{r+1} = [\pi x, \pi y]$ 。また,
 $L = (L_{r-1} + \mathfrak{f} x) \perp L_r \perp \mathfrak{f} y$ だから, 定理 1 により, $L_{r-1} + \theta x$
 は双曲的となり, $K = L_r, J_1 = L_{r-1} \perp \mathfrak{f}[x, y], J_2 = (L_{r-1} + \mathfrak{f} x) \perp \mathfrak{f} y$

として, (2)を得る. (iv) は (iii) と同様に扱える.

命題 2 と 3 により次の定理 2 がえられる.

定理 2 L, M を V 内の格子とする. $O(L) = O(M)$ であるための必要十分条件は次の (1) ~ (4) の内の一つが成立することである:

$$(1) L \sim M, \quad (2) L^* \sim M,$$

$$(3) L \sim K \perp J_1, \quad M \sim K \perp J_2, \quad \text{但し, } K \text{ は } \mathfrak{f}^r\text{-modular,}$$

J_1 と J_2 は指数 r の同類である,

$$(4) L \sim H_1'' \perp H_2, \quad M \sim \mathfrak{f}H_1 \perp H_2'', \quad \text{但し, } H_1, H_2 \text{ はそれぞれ } \mathfrak{f}^{r-1}\text{-, } \mathfrak{f}^r\text{-modular な双曲格子, } H_i'' \text{ は } H_i' \text{ か } H_i \text{ を表わす.}$$

< 参照文献 >

[1] A. Kallman, M. Kneser & U. Stuhler, Invariante Untermoduln quadratischer Moduln, *Crelles J.* 258 (1973), 51-54,

[2] O. T. O'Meara, Introduction to quadratic forms, Springer, 1963.

[3] C. R. Riehm, Orthogonal groups over the integers of a local field, *Amer. J. Math.* 89 (1967), 549-577.