数理解析研究所講究録
第 379 巻 1980 年 25-41

非線形関数微分方程式の解の振動について

長崎大 教育　　北村右一

次の関数微分方程式

(A+)　　$L_n x(t) + f(t, x(g_1(t)), \cdots, x(g_m(t))) = 0$

あるいは

(A-)　　$L_n x(t) - f(t, x(g_1(t)), \cdots, x(g_m(t))) = 0$

の解の振動について調べる. 但しここで

$$L_n = \frac{1}{p_n(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{p_{n-1}(t)} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt} \frac{1}{p_1(t)} \frac{d}{dt} \frac{\cdot}{p_0(t)} .$$

この方程式に関して, 以後常に下の条件を仮定する.

(i) $p_i \in C([a,\infty), R)$, $p_i(t) > 0$ $(0 \leq i \leq n)$, $\int_a^\infty p_i(t)dt = \infty$ $(1 \leq i \leq n-1)$.

(ii) $g_i \in C([a,\infty), R)$, $\lim_{t\to\infty} g_i(t) = \infty$ $(1 \leq i \leq m)$.

(iii) $f \in C([a,\infty) \times R^m, R)$, $u_1 f(t, u_1, \cdots, u_m) > 0$ for $u_1 u_i > 0$ $(1 \leq i \leq m)$

また次の記号を導入する.

$D^0(x; p_0)(t) = x(t)/p_0(t)$

$D^j(x; p_0, \cdots, p_j)(t) = [D^{j-1}(x; p_0, \cdots, p_{j-1})(t)]'/p_j(t)$　　$(1 \leq j \leq n)$

この記号を用いると微分作用素L_nは

$$L_n = D^n(\cdot\,; p_0, \cdots, p_n)$$

と表わすことができる．L_nの定義域$\mathcal{D}(L_n)$を，$D^j(x; p_0, \cdots, p_j)$ $(0 \leqq j \leqq n)$がすべて$[T_x, \infty)$上で連続になる関数x全体のなす集合として定義する．今後$(A_\pm)$の解といえば，$\mathcal{D}(L_n)$に属して$(A_\pm)$を満たすものを意味することにする．解がいくらでも大きな零点を持つときそれを振動解といい，そうでないとき非振動解という．また$\mathcal{D}(L_n)$の元xに対して，$t \uparrow \infty$のときすべての$|D^j(x; p_0, \cdots, p_j)(t)|$ $(0 \leqq j \leqq n-1)$が単調に0に減少するならばxは強減少であるといい，すべてが単調に∞に発散するならばxは強増加であるという．その両方をまとめて強単調という．

ここでの主要な目的は，方程式(A_+)に関して，nが偶数の場合にすべての解が振動するための必要十分条件を，nが奇数の場合にすべての解が振動するか強減少であるための必要十分条件を与え，方程式(A_-)に関して，nが偶数の場合にすべての解が振動するか強単調であるための必要十分条件を，nが奇数の場合にすべての解が振動するか強増加であるための必要十分条件を与えることである．そのためには方程式$(A_\pm)$が次に定義する意味で“優線形”または“劣線形”でなければならない．

<u>定義</u>　方程式 $(A_\pm)$ が優線形［狭義の優線形］であるとは，$\lambda_1+\cdots+\lambda_m=1$ ［$\lambda_1+\cdots+\lambda_m>1$］を満たす非負定数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ に対して，$|u_i|\geqq|v_i|$，$u_i v_j>0$ $(1\leqq i,j\leqq m)$ ならば

$$|f(t,u_1,\cdots,u_m)|/\prod_{i=1}^{m}|u_i|^{\lambda_i} \geqq |f(t,v_1,\cdots,v_m)|/\prod_{i=1}^{m}|v_i|^{\lambda_i}$$

が成立することである．方程式 $(A_\pm)$ が劣線形［狭義の劣線形］であるとは，$\mu_1+\cdots+\mu_m=1$ ［$0<\mu_1+\cdots+\mu_m<1$］を満たす非負定数 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ に対して，$|u_i|\geqq|v_i|$，$u_i v_j>0$ $(1\leqq i,j\leqq m)$ ならば

$$|f(t,u_1,\cdots,u_m)|/\prod_{i=1}^{m}|u_i|^{\mu_i} \leqq |f(t,v_1,\cdots,v_m)|/\prod_{i=1}^{m}|v_i|^{\mu_i}$$

が成立することである．

第1節では方程式 $(A_\pm)$ が優線形または劣線形であるときに，ある種の非振動解の存在性を調べる．第2節では議論を狭義の優線形か狭義の劣線形の場合に限り，最初に $(A_\pm)$ のすべての解が（強単調なものを除いて）振動するための十分条件を確立する．次に第1節の結果と合わせて，方程式 $(A_\pm)$ の振動性を特徴付ける．

1　非振動定理

結果を述べる前に記号の準備が必要である．

$$g_{i*}(t)=\min\{g_i(t),t\}\ (1\leqq i\leqq m),\quad g_*(t)=\min_{1\leqq i\leqq m} g_{i*}(t),$$

$$\gamma(t)=\inf_{s\geqq t} g_*(s),$$

$$\langle\varphi,g\rangle(t)=(\varphi(g_1(t)),\cdots,\varphi(g_m(t))).$$

$i_k\in\{1,\cdots,n-1\}$ （$1\leqq k\leqq n-1$）と $t,s\in[a,\infty)$ に対して次のような積分を定義する．

$$I_0=1,$$

$$I_k(t,s;p_{i_k},\cdots,p_{i_1})=\int_s^t p_{i_k}(u)\,I_{k-1}(u,s;p_{i_{k-1}},\cdots,p_{i_1})\,du,\quad 1\leqq k\leqq n-1.$$

この積分に関して下の恒等式の成立することが容易に確かめられる．

(i) $I_k(t,s;p_{i_k},\cdots,p_{i_1})=(-1)^k I_k(t,s;p_{i_1},\cdots,p_{i_k}),\quad 1\leqq k\leqq n-1,$

(ii) $I_k(t,s;p_{i_k},\cdots,p_{i_1})=\int_s^t p_{i_1}(u)\,I_{k-1}(t,u;p_{i_k},\cdots,p_{i_2})\,du,\quad 1\leqq k\leqq n-1,$

(iii) $D^i(x;p_0,\cdots,p_i)(t)$

$$=\sum_{j=i}^{k}(-1)^{j-i}D^j(x;p_0,\cdots,p_j)(s)\,I_{j-i}(s,t;p_j,\cdots,p_{i+1})$$
$$+\ (-1)^{k-i+1}\int_t^s I_{k-i}(u,t;p_k,\cdots,p_{i+1})\,p_{k+1}(u)\,D^{k+1}(x;p_0,\cdots,p_{k+1})(u)\,du,$$

$$0\leqq i\leqq k\leqq n-1.$$

線形非振動方程式 $L_n x(t)=0$ を考えると，明らかに

$$\{p_0(t)I_i(t,a;p_1,\cdots,p_i)\mid 0\leqq i\leqq n-1\}$$

はその解の基本系をなしている．この節では，$t\to\infty$ のときに，方程式 $(A_\pm)$ がそのそれぞれに漸近する解を持つための条件について述べる．簡単のために，今後下にあげる略記法を用いる．

$J_i(t,T) = I_i(t,T; p_1,\cdots,p_i)$, $\qquad J_i(t) = J_i(t,a)$

$K_i(t,T) = I_{n-i-1}(t,T; p_{n-1},\cdots,p_{i+1})$, $\qquad K_i(t) = K_i(t,a)$, $0 \leqq i \leqq n-1$.

定理1　$(A_\pm)$ が優線形または劣線形であるものとし，$i \in \{0,\cdots,n-1\}$ を任意に固定する．このとき，ある定数 $b \neq 0$ に対して方程式 $(A_\pm)$ が

$$\lim_{t\to\infty} D^i(x; p_0,\cdots,p_i)(t) = b$$

を満足する非振動解 $x(t)$ を持つための必要十分条件は，

$$\int^\infty K_i(t)\, p_n(t) |f(t, \langle c\, p_0 J_i, g\rangle(t))|\, dt < \infty$$

をみたす定数 $c \neq 0$ が存在することである．

証明．（必要性）$t_0 > a$ を十分大きく選んで

$$D^j(x; p_0,\cdots,p_j)(t) \neq 0, \quad t \in [\gamma(t_0), \infty), \quad 0 \leqq j \leqq n$$

とすることができる．$\sigma = \operatorname{sgn} D^{i+1}(x; p_0,\cdots,p_i)(t_0)$ とするとき

$$(-1)^{j-i+1}\sigma D^j(x; p_0,\cdots,p_j)(t) > 0, \quad i+1 \leqq j \leqq n$$

となることが容易に示される．恒等式(iii)で $k = n-1$, $t = t_0$ とおいて両辺に σ をかけると，$s \geqq t_0$ のとき

$$\int_{t_0}^{s} I_{n-i-1}(u, t_0; p_{n-1},\cdots,p_{i+1})\, p_n(u) |L_n x(u)|\, du$$
$$\leqq |D^i(x; p_0,\cdots,p_i)(s) - D^i(x; p_0,\cdots,p_i)(t_0)|$$

が得られる．ここで $s \to \infty$ とすると

$$\int_{t_0}^{\infty} K_i(t)\, p_n(t) |f(t, \langle x, g\rangle(t))|\, dt < \infty.$$

あとは $x(t) \sim b\, p_0(t) J_i(t)$ であることと，$(A_\pm)$ の優線形性ある

いは劣線形性を用いることによって結論が導かれる．

（十分性）　$T>a$ を十分大きく選び，$T_0=\gamma(T)$ とおく．$\mathcal{C}$ を広義一様収束の位相を持つ $[T_0,\infty)$ 上の連続関数全体のなす位相線形空間とし，$\mathcal{C}$ の閉凸部分集合

$$X=\{x\in\mathcal{C} \mid |b_1|p_0(t)J_i(t)\le \operatorname{sgn} b\cdot x(t)\le |b_2|p_0(t)J_i(t),\ t\ge T_0\}$$

を考える．X 上の積分作用素 $\mathcal{F}$ を下のように定義する．

$$\mathcal{F}x(t)=\begin{cases} b\,p_0(t)J_i(t)\pm p_0(t)\Phi_i x(t), & t\in[T,\infty) \\ b\,p_0(t)J_i(t)\pm p_0(t)\Phi_i x(T), & t\in[T_0,T) \end{cases}$$

$$\Phi_i x(t)=\begin{cases} \int_t^\infty I_{n-1}(t,s;p_1,\cdots,p_{n-1})p_n(s)f(s,\langle x,g\rangle(s))ds, & i=0 \\ \int_T^t I_{i-1}(t,s;p_1,\cdots,p_{i-1})p_i(s)\cdot \\ \quad\cdot\int_s^\infty I_{n-i-1}(s,u;p_{i+1},\cdots,p_{n-1})p_n(u)f(u,\langle x,g\rangle(u))\,du\,ds, & \\ & 1\le i\le n-1. \end{cases}$$

このとき，$\mathcal{F}$ の X における不動点が存在し，それが求める漸近行動を示す解となる．但しここで，$b, b_1, b_2\ne 0$ は c と同符号の定数で，c の値や，考えている方程式が $(A+)$ なのか $(A-)$ なのか，またそれが優線形なのか劣線形なのかなどによって適当に選ぶ．

2　振動定理

この節では方程式 $(A\pm)$ が狭義の優線形あるいは狭義の劣線

形である場合に，解の振動性を議論する．

最初に，振動定理を証明するとき主要な道具となる補題をいくつか述べる．

補題 1　$x \in \mathscr{D}(L_n)$ が $[t_0, \infty)$ 上で $x L_n x \neq 0$ をみたしているものと仮定する．このとき以下に述べる条件を満足させる $t_1 > t_0$ と $l \in \{0, \cdots, n\}$ が存在する．

$$\begin{cases} l \not\equiv n \pmod 2, & \text{if } \ x L_n x < 0 \\ l \equiv n \pmod 2, & \text{if } \ x L_n x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x D^j(x; p_0, \cdots, p_j) > 0 \quad \text{on } [t_1, \infty) & (0 \leqq j \leqq l) \\ (-1)^{j-l} x D^j(x; p_0, \cdots, p_j) > 0 \quad \text{on } [t_1, \infty) & (l+1 \leqq j \leqq n) \end{cases}$$

特に $l \in \{1, \cdots, n-1\}$ ならば次の不等式が成立する．

$$|D^0(x, p_0)(t)| \geqq \int_{t_1}^{t} H_l(s, t_1) p_n(s) |L_n x(s)| ds$$
$$+ H_l(t, t_1) \int_t^\infty p_n(s) |L_n x(s)| ds, \quad t \geqq t_1 .$$

但しここで，

$$H_l(t, t_1) = \int_{t_1}^{t} I_{l-1}(t, u; p_1, \cdots, p_{l-1}) p_l(u) I_{n-l-1}(t, u; p_{n-1}, \cdots, p_{l+1}) du .$$

証明．$t_1 > t_0$ を十分大きく選んで，$\gamma(t_1) > t_0$ と

$$D^j(x; p_0, \cdots, p_j)(t) \neq 0, \quad t > t_1, \quad 0 \leqq j \leqq n$$

が成り立つようにすることができる．$\sigma_j = \operatorname{sgn} D^j(x; p_0, \cdots, p_j)(t_1)$ とおくと簡単な計算によって，$\sigma_j \sigma_{j+1} > 0$ ならば $\sigma_{j-1} \sigma_j > 0$ となることが示される．このことから条件をみたす l が存在す

ることは明らかである．

次に $\ell \in \{1, \cdots, n-1\}$ と仮定する．恒等式 (iii) で $i = 0$，$k = \ell - 1$，$s = t_1$ とおいて両辺に σ_0 をかけると，$t \geqq t_1$ のとき

$$|D^0(x;p_0)(t)| \geqq \int_{t_1}^{t} I_{\ell-1}(t,u;p_0,\cdots,p_{\ell-1})\, p_\ell(u) |D^\ell(x;p_0,\cdots,p_\ell)(u)|\, du$$

が得られ，同じく $i = \ell$，$k = n-1$，$t = u$ とおいて σ_ℓ をかけ，$s \to \infty$ とすると

$$|D^\ell(x;p_0,\cdots,p_\ell)(u)| \geqq \int_u^\infty I_{n-\ell-1}(v,u;p_{n-1},\cdots,p_{\ell+1})\, p_n(v) |L_n x(v)|\, dv$$

を得る．この２つの不等式を組み合わせ，前節で導入した略記法を用いて計算すると，

$$\begin{aligned}
&|D^\ell(x;p_0)(t)| \\
&\quad \geqq \int_{t_1}^{t} J_{\ell-1}(t,u) p_\ell(u) \int_u^t K_\ell(v,u) p_n(v) |L_n x(v)|\, dv\, du \\
&\quad + \int_{t_1}^{t} J_{\ell-1}(t,u) p_\ell(u) \int_t^\infty K_\ell(v,u) p_n(v) |L_n x(v)|\, dv\, du \\
&\quad \geqq \int_{t_1}^{t} p_n(v) |L_n x(v)| \int_{t_1}^{v} J_{\ell-1}(t,u) p_\ell(u) K_\ell(v,u)\, du\, dv \\
&\quad + \int_{t_1}^{t} J_{\ell-1}(t,u) p_\ell(u) K_\ell(t,u)\, du \cdot \int_t^\infty p_n(v) |L_n x(v)|\, dv \\
&\quad = \int_{t_1}^{t} H_\ell(v,t_1) p_n(v) |L_n x(v)|\, dv + H_\ell(t,t_1) \int_t^\infty p_n(v) |L_n x(v)|\, dv, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \geqq t_1
\end{aligned}$$

となって結論の不等式に達する．

次の補題はある種の積分不等式の解が存在するための必要条件を与えている．

補題2　$\nu_1,\cdots,\nu_m$ は非負定数，t_0，t_1 は $\gamma(t_1)\geqq t_0\geqq a$ をみたす定数とする．関数 $W\in C([t_0,\infty),R_+)$，$\alpha\in C^1([t_1,\infty),R_+)$，$\beta\in C([t_1,\infty),R_+)$ （但し $R_+=(0,\infty)$）に対して，W と α は $[t_1,\infty)$ 上単調非減少であり

$$\int_{t_1}^{\infty}\beta(t)\prod_{i=1}^{m}W^{\nu_i}(g_i(t))\,dt<\infty$$

が成り立つと仮定する．g_i は最初に述べた条件 (ii) をみたしている関数である．このとき $W(t)$ が積分不等式

$$W(t)\geqq\int_{t_1}^{t}\alpha(s)\beta(s)\prod_{i=1}^{m}W^{\nu_i}(g_i(s))\,ds+\alpha(t)\int_t^{\infty}\beta(s)\prod_{i=1}^{m}W^{\nu_i}(g_i(s))\,ds,\quad t\geqq t_1$$

を満足するならば次の結論が成立する．

(i) $\nu_1+\cdots+\nu_m>1$ ならば

$$\int^{\infty}\alpha(g_*(t))\beta(t)\,dt<\infty.$$

(ii) $0<\nu_1+\cdots+\nu_m<1$ ならば

$$\int^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\alpha^{\nu_i}(g_{i*}(t))\cdot\beta(t)\,dt<\infty.$$

証明．$\nu=\nu_1+\cdots+\nu_m$ とおいて，t_2 は $\gamma(t_2)>t_1$ となるものを選ぶ．

(i) $\nu>1$ のとき積分不等式の右辺を $w(t)$ とおくと

$$\begin{aligned}w'(t)&=\alpha'(t)\int_t^{\infty}\beta(s)\prod_{i=1}^{m}W^{\nu_i}(g_i(s))\,ds\\&\geqq\alpha'(t)\int_t^{\infty}\beta(s)\prod_{i=1}^{m}w^{\nu_i}(g_i(s))\,ds,\quad t\geqq t_2.\end{aligned}$$

t_3,t_4 $(t_3<t_4)$ を十分大きく選び，上の不等式を $w^{\nu}(t)$ で割って $[t_2,t_4]$ 上積分すると

$$\frac{1}{\nu-1}w^{1-\nu}(t_2) \geq \int_{t_2}^{t_4}\alpha'(t)w^{-\nu}(t)\int_t^{t_4}\beta(s)\prod_{i=1}^{m}w^{\nu_i}(g_i(s))\,ds\,dt$$
$$= \int_{t_2}^{t_4}\beta(s)\int_{t_2}^{s}\alpha'(t)\prod_{i=1}^{m}\{w(g_i(s))/w(t)\}^{\nu_i}\,dt\,ds.$$

$w(t)$の単調性に注意すると

$$\frac{1}{\nu-1}w^{1-\nu}(t_2) \geq \int_{t_3}^{t_4}\beta(s)\int_{t_2}^{g_*(s)}\alpha'(t)\prod_{i=1}^{m}\{w(g_i(s))/w(t)\}^{\nu_i}\,dt\,ds$$
$$\geq \int_{t_3}^{t_4}\{\alpha(g_*(s))-\alpha(t_2)\}\beta(s)\,ds.$$

従って

$$\int_{t_3}^{t_4}\alpha(g_*(s))\beta(s)\,ds \leq \frac{1}{\nu-1}w^{1-\nu}(t_2) + \alpha(t_2)\int_{t_3}^{t_4}\beta(s)\,ds.$$

ここで $t_4 \to \infty$ とすると結論が示される。

(ii) $0<\nu<1$ のとき

$$z(t) = \int_t^{\infty}\beta(s)\prod_{i=1}^{m}W^{\nu_i}(g_i(s))\,ds$$

とおくと $W(t)$ の単調性より

$$W(g_i(t)) \geq W(g_{i*}(t))$$
$$\geq \alpha(g_{i*}(t))\int_{g_{i*}(t)}^{\infty}\beta(s)\prod_{j=1}^{m}W^{\nu_j}(g_j(s))\,ds$$
$$\geq \alpha(g_{i*}(t))\,z(t), \qquad t \geq t_2,\quad 1 \leq i \leq m.$$

故に

$$-z'(t) = \beta(t)\prod_{i=1}^{m}W^{\nu_i}(g_i(t)) \geq \beta(t)\,z^{\nu}(t)\prod_{i=1}^{m}\alpha^{\nu_i}(g_{i*}(t)).$$

これを $z^{\nu}(t)$ で割って t_2 から ∞ まで積分すると結論は明らかである。

これで準備が整った。以後次の記号を用いる。

$$Z_+(n) = \{\ell \mid 1 \leq \ell \leq n-1,\ \ell \not\equiv n \pmod 2\},$$

$$Z_-(n) = \{ l \mid 1 \leqq l \leqq n-1,\ l \equiv n \ (\mathrm{mod}\ 2) \}.$$

また $H_l(t,a)$ を単に $H_l(t)$ と書くことにする.

<u>定理2</u>　(A_+) が狭義の優線形であり，すべての $l \in Z_+(n)$ に対して

(1)　$\int^\infty H_l(g_*(t))\, p_n(t)\, |f(t, \langle cp_0, g \rangle (t))| dt = \infty$　for $\forall c \neq 0$

が成り立つと仮定する. n が奇数ならば更に次を仮定する.

(2)　$\int^\infty K_0(t)\, p_n(t)\, |f(t, \langle cp_0, g \rangle (t))| dt = \infty$　for $\forall c \neq 0$.

このとき，n が偶数ならば (A_+) のすべての解は振動し，n が奇数ならば (A_+) のすべての解は振動するか強減少である.

証明. (A_+) が非振動解 $x(t)$ を持ち，$[t_0, \infty)$ 上で $xL_n x \neq 0$ となるものとする. このとき補題1の整数 l は $\{0\} \cup Z_+(n)$ の元になる. $l \in Z_+(n)$ の場合を考える. $x(t)$ と同符号の定数 $c \neq 0$ で

$$|x(t)| \geqq |c|\, p_0(t), \quad t \geqq t_0$$

をみたすものが存在するので，優線形性を示す定数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ に対して $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ とおくと

$$|L_n x(t)| \geqq |c|^{-\lambda} |f(t, \langle cp_0, g \rangle (t))| \prod_{i=1}^{m} |D^0(x; p_0)(g_i(t))|^{\lambda_i}, \quad t \geqq t_1.$$

$W(t) = |D^0(x; p_0)(t)|$, $\alpha(t) = H_l(t, t_1)$, $\beta(t) = |c|^{-\lambda} p_n(t) |f(t, \langle cp_0, g \rangle (t))|$

とおいて補題1の後半を用いると

$$W(t) \geqq \int_{t_1}^{t} \alpha(s)\beta(s) \prod_{i=1}^{m} W^{\lambda_i}(g_i(s))\, ds + \alpha(t) \int_t^\infty \beta(s) \prod_{i=1}^{m} W^{\lambda_i}(g_i(s))\, ds.$$

従って補題2から

$$\int^\infty H_\ell(g_*(t), t_1)\, p_n(t)\, |f(t, \langle c p_0, g\rangle(t))|\, dt < \infty.$$

これは (1) に矛盾する．n が偶数の場合は $\ell \neq 0$ であるからこのことは (A_+) の任意の解が振動することを意味する．n が奇数の場合は $\ell = 0$ でなければならない．$t \uparrow \infty$ のとき

$$|D^0(x;p_0)(t)| \downarrow b \geq 0, \quad |D^j(x;p_0,\cdots,p_j)(t)| \downarrow 0, \quad 1 \leq j \leq n-1$$

となるが，$b > 0$ ならば定理1 ($i=0$) より

$$\int^\infty K_0(t)\, p_n(t)\, |f(t, \langle c p_0, g\rangle(t))|\, dt < \infty$$

をみたす定数 $c \neq 0$ が存在して (2) に矛盾するので $b = 0$ である．即ち $x(t)$ は強減少である．

<u>定理3</u>　(A_+) が狭義の劣線形であり，すべての $\ell \in Z_+(n)$ に対して

$$(3) \quad \int^\infty \prod_{i=1}^{m} \left\{\frac{H_\ell(g_{i*}(t))}{J_{n-1}(g_i(t))}\right\}^{\mu_i} p_n(t)\, |f(t, \langle c p_0 J_{n-1}, g\rangle(t))|\, dt = \infty, \quad \text{for } \forall c \neq 0$$

が成り立つと仮定する．ここで $\mu_1,\cdots,\mu_m$ は劣線形性を表わす定数である．n が奇数のときは更に (2) を仮定する．このとき定理2の結論が成立する．

証明．(A_+) が非振動解 $x(t)$ を持ち，$[t_0,\infty)$ 上で $x L_n x \neq 0$ となるものとする．補題1の整数 ℓ は $Z_+(n)$ には属さないことが次のようにして示される．$\ell \in Z_+(n)$ と仮定すると，$x(t)$

と同符号の定数 $c \neq 0$ で

$$|x(t)| \leqq |c|\, p_0(t) J_{n-1}(t), \quad t \geqq t_0$$

をみたすものがある．$\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_m$ とおくと $t \geqq t_1$ のとき

$$|L_n x(t)| \geqq |c|^{-\mu} |f(t, \langle c p_0 J_{n-1}, g \rangle (t))| \prod_{i=1}^{m} \left\{ \frac{|D^0(x; p_0)(g_i(t))|}{J_{n-1}(g_i(t))} \right\}^{\mu_i}.$$

$W(t) = |D^0(x; p_0)(t)|$，$\alpha(t) = H_\ell(t, t_1)$，$\beta(t) = |c|^{-\mu} |f(t, \langle c p_0 J_{n-1}, g \rangle (t))| \cdot \prod_{i=1}^{m} J_{n-1}^{-\mu_i}(g_i(t))$ とおいて補題1の後半を用いると

$$W(t) \geqq \int_{t_1}^{t} \alpha(s) \beta(s) \prod_{i=1}^{m} W^{\mu_i}(g_i(s))\, ds + \alpha(t) \int_{t_1}^{t} \beta(s) \prod_{i=1}^{m} W^{\mu_i}(g_i(s))\, ds.$$

従って補題2から

$$\int^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \left\{ \frac{H_\ell(g_{i*}(t), t_1)}{J_{n-1}(g_i(t))} \right\}^{\mu_i} p_n(t) |f(t, \langle c p_0 J_{n-1}, g \rangle (t))|\, dt < \infty .$$

これは (3) に矛盾する．故に $\ell \notin \mathfrak{Z}_+(n)$ である．

あとは定理2と同様にして証明される．

<u>定理4</u>　(A-) を狭義の優線形とし，すべての $\ell \in \mathfrak{Z}_-(n)$ に対して (1) が成り立つものと仮定する．また

(4)　$$\int^{\infty} p_n(t) |f(t, \langle c p_0 J_{n-1}, g \rangle (t))|\, dt = \infty \quad \text{for } \forall c \neq 0$$

と仮定する．n が偶数のときは更に (2) を仮定する．このとき，n が偶数ならば (A-) のすべての解は振動するか強単調であり，n が奇数ならば (A-) のすべての解は振動するか強増加である．

証明. (A_-) が非振動解 $x(t)$ を持ち, $[t_0,\infty)$ 上で $xL_nx \neq 0$ となるものとする. 補題1の整数 ℓ は $\{0,n\}\cup Z_-(n)$ の元であるが, 定理2と同様に $\ell \notin Z_-(n)$ が示される. そこで $\ell = n$ の場合を考えると

$$|D^{n-1}(x;p_0,\cdots,p_{n-1})(t)| \uparrow b \leqq \infty \quad (t\uparrow\infty)$$

が得られる. $b<\infty$ のときは定理1 $(i=n-1)$ から

$$\int^{\infty} p_n(t)|f(t,<cp_0J_{n-1},g>(t))|dt < \infty$$

をみたす定数 $c\neq 0$ が存在するので (4) に矛盾する. 従って $b=\infty$, 即ち $x(t)$ は強増加である. n が奇数のときは $\ell\neq 0$ であるから証明は終わる. n が偶数で $\ell=0$ のときは定理2と同様にして $x(t)$ の強減少性が導かれる.

<u>定理5</u> (A_-) を狭義の劣線形とする. すべての $\ell\in Z_-(n)$ に対して (3) が成り立つものとし, (4) を仮定する. n が偶数のときは更に (2) を仮定する. このとき定理4の結論が成立する.

証明の方針は定理4と全く同様であるから省略する.

さて次に

(5) $$\liminf_{t\to\infty} H_\ell(g_*(t))/K_0(t) > 0$$

を仮定すると条件 (1) は条件 (2) に含まれ,

(6) $$\liminf_{t\to\infty} H_\ell(g_{i*}(t))/J_{n-1}(g_i(t)) > 0 \quad (1 \le i \le m)$$

を仮定すると条件 (3) は条件 (4) に含まれるので，定理1と定理2－5を組み合わせて直ちに以下の必要十分条件を得る．

<u>定理6</u>　(A+) を狭義の優線形とし，任意の $\ell \in \mathcal{Z}_+(n)$ に対して (5) を仮定する．

(i)　n が偶数の場合．(A+) のすべての解が振動するための必要十分条件は (2) が成り立つことである．

(ii)　n が奇数の場合．(A+) のすべての解が振動するか強減少であるための必要十分条件は (2) が成り立つことである．

<u>定理7</u>　(A+) を狭義の劣線形とし，任意の $\ell \in \mathcal{Z}_+(n)$ に対して (6) を仮定する．

(i)　n が偶数の場合．(A+) のすべての解が振動するための必要十分条件は (4) が成り立つことである．

(ii)　n が奇数の場合．(A+) のすべての解が振動するか強減少であるための必要十分条件は (2) と (4) が成り立つことである．

<u>定理8</u>　(A-) を狭義の優線形とし，任意の $\ell \in \mathcal{Z}_-(n)$ に対して (5) を仮定する．

(i)　n が偶数の場合．(A-) のすべての解が振動するか強単調であるための必要十分条件は (2) と (4) が成り立つことである．

(ii)　n が奇数の場合．(A-) のすべての解が振動するか強増加であるための必要十分条件は (2) と (4) が成り立つことである．

<u>定理 9</u>　(A-) を狭義の劣線形とし，任意の $\ell \in Z_-(n)$ に対して (6) を仮定する．

(i)　n が偶数の場合．(A-) のすべての解が振動するか強単調であるための必要十分条件は (2) と (4) が成り立つことである．

(ii)　n が奇数の場合．(A-) のすべての解が振動するか強増加であるための必要十分条件は (4) が成り立つことである．

最後に例をあげてこの稿を終えることにする．

次の方程式を考える．

(7)　$t^{\alpha_n}(t^{\alpha_{n-1}}(\cdots(t^{\alpha_1}(t^{\alpha_0}x(t))')'\cdots)')' + q(t)|x(g(t))|^{\nu}\operatorname{sgn} x(g(t)) = 0$.

但し，n は偶数で，$\alpha_0,\cdots,\alpha_n < 1$，$\nu > 0$，$q, g \in C([1,\infty), R)$，$\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$，$q(t) > 0$ とする．また $g_*(t) = \min\{g(t), t\}$ とおく．$\nu > 1$ で，$\liminf_{t\to\infty} g_*(t)/t > 0$ のとき (7) のすべての解が

振動するための必要十分条件は

$$\int^{\infty} t^{n-1-\alpha_1-\cdots-\alpha_n}[g(t)]^{-\nu\alpha_0}q(t)dt = \infty$$

である. $\nu < 1$ で $\liminf_{t\to\infty} g_*(t)/g(t) > 0$ のとき (7) のすべての解が振動するための必要十分条件は

$$\int^{\infty} t^{-\alpha_n}[g(t)]^{\nu(n-1-\alpha_0-\cdots-\alpha_{n-1})}q(t)dt = \infty$$

である.