数理解析研究所講究録
第 379 巻 1980 年 42-59

関数微分方程式における比較定理

広大 理　　草野 尚
内藤 学

§1. 序.

関数微分方程式

(L_n^+, F, g)　　$L_n x(t) + F(t, x(g(t))) = 0$

(L_n^-, F, g)　　$L_n x(t) - F(t, x(g(t))) = 0$

$(L_n^\pm, F, g)$　　$L_n x(t) + (-1)^{n+1} F(t, x(g(t))) = 0$

を考える。ここで L_n は次の形の微分作用素である：

(1)
$$L_n = \frac{1}{p_n(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{p_{n-1}(t)} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt} \frac{1}{p_1(t)} \frac{d}{dt} \frac{\circ}{p_0(t)}$$

仮定は次の通り：

(L-1) $p_i : [a, \infty) \to (0, \infty)$, $0 \le i \le n$, は連続,
$$\int_a^\infty p_i(t)\,dt = \infty, \quad 1 \le i \le n-1;$$

(L-2) $g : [a, \infty) \to R$ は連続, $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$;

(L-3) $F : [a, \infty) \times R \to R$ は連続, $F(t, x)$ は x に関して単調非減少, $xF(t, x) > 0$ $(x \ne 0)$.

関数 $x(t)$ の "quasi-derivatives" を定義する：

$$(2)\quad \begin{aligned} &D^0(x;p_0)(t)=\frac{x(t)}{p_0(t)}\\ &D^i(x;p_0,\cdots,p_i)(t)=\frac{1}{p_i(t)}\frac{d}{dt}D^{i-1}(x;p_0,\cdots,p_{i-1})(t),\quad 1\le i\le n.\end{aligned}$$

微分作用素 L_n の domain $\mathcal{D}(L_n)$ は，quasi-derivatives $D^i(x;p_0,\cdots,p_i)(t)$, $0\le i\le n$, が存在して連続であるような関数 $x:[T_x,\infty)\to R$ 全体であるとする。以下，方程式 (L_n^+,F,g) 等の解と言えば，十分大きい t に対して方程式 (L_n^+,F,g) 等を満たす関数 $x\in\mathcal{D}(L_n)$ で，nontrivial なるものを意味する。勿論このような解の存在を仮定しなければならない。

連続関数 $u:[T_u,\infty)\to R$ が限りなく大きい零点をもつとき，$u(t)$ は振動，そうでないとき $u(t)$ は非振動と呼ばれる。

補題1. $x\in\mathcal{D}(L_n)$ が区間 $[t_0,\infty)$ 上で $x(t)L_nx(t)>0$ $[<0]$ を満足するならば，適当な整数 $l\in\{0,1,\cdots,n\}$, $l\equiv n \pmod 2$ $[l\not\equiv n \pmod 2]$ と $t_1\ge t_0$ が存在して $[t_1,\infty)$ 上で次の不等式が成立つ：

$$(3)\quad \begin{cases} x(t)D^i(x;p_0,\cdots,p_i)(t)>0, & 0\le i\le l,\\ (-1)^{i-l}x(t)D^i(x;p_0,\cdots,p_i)(t)>0, & l\le i\le n.\end{cases}$$

(3)式を満たす関数を degree l の関数と言う。方程式 (L_n^+,F,g) 等の degree l の解（もちろん，非振動解）全体の集合を $\mathcal{N}_l$ で表わす。非振動解の全体の集合を $\mathcal{N}$ とする。

定義. 方程式 (L_n^+,F,g) が性質Aを持つとは，この方程式

に対して

nが偶数ならば$\mathcal{N}=\phi$, nが奇数ならば$\mathcal{N}=\mathcal{N}_0$

が成立つことを言う。

方程式(L_n^-, F, g)が性質 B を持つとは，この方程式に対して

nが偶数ならば$\mathcal{N}=\mathcal{N}_0 \cup \mathcal{N}_n$, nが奇数ならば$\mathcal{N}=\mathcal{N}_n$

が成立つことを言う。

また，方程式$(L_n^\pm, F, g)$に対して，$\mathcal{N}_0=\phi$なるとき，この方程式は性質 C を持つと言う。

本稿の目的は，方程式(L_n^+, F, g), (L_n^-, F, g), $(L_n^\pm, F, g)$に対する性質 A, B, C と他の方程式

(M_n^+, G, h) $\quad M_n x(t) + G(t, x(h(t))) = 0$

(M_n^-, G, h) $\quad M_n x(t) - G(t, x(h(t))) = 0$

$(M_n^\pm, G, h)$ $\quad M_n x(t) + (-1)^{n+1} G(t, x(h(t))) = 0$

に対する性質 A, B, C との関連を調べることにある。ここでM_nは

$$(4) \quad M_n = \frac{1}{q_n(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{q_{n-1}(t)} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt} \frac{1}{q_1(t)} \frac{d}{dt} \frac{\cdot}{q_0(t)}$$

の形の微分作用素で，次の条件が満たされると仮定する：

(M-1) $q_i : [a, \infty) \to (0, \infty)$, $0 \le i \le n$, は連続

$$\int_a^\infty q_i(t)\,dt = \infty, \quad 1 \le i \le n-1;$$

(M-2) $h : [a, \infty) \to R$ は連続, $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$;

(M-3) $G : [a, \infty) \times R \to R$ は連続, $G(t, x)$ は x に関して単

調非減少, $xG(t,x)>0 \ (x\neq 0)$.

§2. 補題

$t,s\in[a,\infty)$, $i_k\in\{1,\cdots,n-1\}$ $(1\le k\le n-1)$ に対して

$$(5)\quad \begin{cases} I_0 = 1 \\ I_k(t,s;p_{i_1},\cdots,p_{i_k}) = \int_s^t p_{i_1}(r)\, I_{k-1}(r,s;p_{i_2},\cdots,p_{i_k})\,dr \end{cases}$$

とおく. また, $0\le k\le n-1$ に対して

$$J_k(t,s)=p_0(t)I_k(t,s;p_1,\cdots,p_k),\quad K_k(t,s)=p_n(t)I_k(t,s;p_{n-1},\cdots,p_{n-k})$$
$$J_k(t)=J_k(t,a),\qquad K_k(t)=K_k(t,a)$$

なる記号も用いる。

補題2. $x\in\mathcal{S}(L_n)$ ならば, $t,s\in[T_x,\infty)$; $0\le i\le k\le n-1$ に対して次の関係式が成立つ:

$$\begin{aligned} &D^i(x;p_0,\cdots,p_i)(t)\\ &=\sum_{j=i}^{k}(-1)^{j-i}D^j(x;p_0,\cdots,p_j)(s)\,I_{j-i}(s,t;p_j,\cdots,p_{i+1})\\ &+(-1)^{k-i+1}\int_t^s I_{k-i}(r,t;p_k,\cdots,p_{i+1})\,p_{k+1}(r)\,D^{k+1}(x;p_0,\cdots,p_{k+1})(r)\,dr \end{aligned}$$

補題3. 以下 $t\ge T \Rightarrow g(t)\ge t_0$ とし, $u:[t_0,\infty)\to(0,\infty)$, $w:[T,\infty)\to(0,\infty)$, $H:[T,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\Phi,\Psi:\Delta\to[0,\infty)$ $(\Delta=\{(t,s): t\ge s\ge T\})$ は連続関数で, $H(t,x)$ は x に関して単調非減少であると仮定する。

(i) $\int_T^\infty \Psi^*(t)\,H(t,u(g(t)))\,dt<\infty$

(6) $$u(t) \geq w(t) + \int_T^t \Phi(t,s) \int_s^\infty \Psi(r,s) H(r, u(g(r)))\,dr\,ds, \quad t \geq T,$$

とする．ここで $\Psi^*(t) = \max\{\Psi(t,s) : s \in [T,t]\}$．このとき，積分方程式

$$v(t) = w(t) + \int_T^t \Phi(t,s) \int_s^\infty \Psi(r,s) H(r, v(g(r)))\,dr\,ds, \quad t \geq T,$$

は $w(t) \leq v(t) \leq u(t)$, $t \geq T$, を満たす連続な解 $v(t)$ を持つ．

(ii) (i) において (6) を次式でおきかえる：

$$u(t) \geq w(t) + \int_t^\infty \Psi(s,t) H(s, u(g(s)))\,ds, \quad t \geq T.$$

このとき，積分方程式

$$v(t) = w(t) + \int_t^\infty \Psi(s,t) H(s, v(g(s)))\,ds, \quad t \geq T,$$

は $w(t) \leq v(t) \leq u(t)$, $t \geq T$, を満たす連続な解 $v(t)$ を持つ．

補題 4. 微分不等式

(i) $$\{L_n x(t) + F(t, x(g(t)))\} \operatorname{sgn} x(t) \leq 0$$

を満たす degree l $(1 \leq l \leq n-1)$ の関数 $x \in \mathcal{D}(L_n)$ が存在すれば，微分方程式 (L_n^+, F, g) の degree l の解が存在する。

(ii) 微分不等式

$$\{L_n x(t) - F(t, x(g(t)))\} \operatorname{sgn} x(t) \geq 0$$

を満たす degree l $(1 \leq l \leq n-1)$ の関数 $x \in \mathcal{D}(L_n)$ が存在すれば，微分方程式 (L_n^-, F, g) の degree l の解が存在する．

補題 5. i $(0 \leq i \leq n-1)$ を固定する．方程式 (L_n^+, F, g) $[(L_n^-, F, g)]$ が $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{J_i(t)} = a_i \in R-\{0\}$ なる非振動解を持つための必要十分条件は，ある定数 $c \in R-\{0\}$ に対して

$$\int^\infty K_{n-i-1}(t)\,|F(t, c\,J_i(g(t)))|\,dt < \infty$$

が成立つことである。

補題 3, 4 については Kusano and Naito [9] を，補題 5 については Kitamura and Kusano [5] を参照されたい。

§3. Sturm 型の比較定理

定理 1. 次の条件を仮定する：

$g(t) \ge h(t)$

$p_0(g(t)) \ge q_0(h(t))$

$p_i(t) \ge q_i(t), \quad 1 \le i \le n$

$F(t,x)\,\mathrm{sgn}\,x \ge G(t,x)\,\mathrm{sgn}\,x$

(i) (M_n^+, G, h) が性質 A を持てば，(L_n^+, F, g) も性質 A を持つ．

(ii) (M_n^-, G, h) が性質 B を持てば，(L_n^-, F, g) も性質 B を持つ．

証明のあらまし．結論を否定すれば，(L_n^+, F, g) または (L_n^-, F, g) は degree ℓ $(1 \le \ell \le n-1)$ の非振動解 $x(t)$ を持つ．この $x(t)$ は正と仮定してよい．補題 2 を用いると，十分大きい t_1 に対して次の不等式が成立つことが示される：

$$D^0(x;p_0)(t) \ge c + \int_{t_1}^t I_{\ell-1}(t,s;p_1,\dots,p_{\ell-1})\,p_\ell(s)\cdot$$

$$\cdot\int_s^\infty I_{n-\ell-1}(r,s;p_{n-1},\dots,p_{\ell+1})\,p_n(r)\,F(r, p_0(g(r))\,D^0(x;p_0)(g(r)))\,dr\,ds, \quad t \ge t_1,$$

ここで c は正の定数である．定理の仮定を用いて，この不等

式から

$$D^0(x;p_0)(t) \geq c + \int_{t_1}^{t} I_{\ell-1}(t,s;q_1,\cdots,q_{\ell-1})\, q_\ell(s)\cdot$$

$$\cdot\int_s^\infty I_{n-\ell-1}(r,s;q_{n-1},\cdots,q_{\ell+1})\, q_n(r)\, G(r, q_0(h(r))D^0(x;p_0)(h(r)))\,dr\,ds,\quad t \geq t_1,$$

を導く。ここで補題3の(i)を適用すれば，積分方程式

$$y(t) = c + \int_{t_1}^{t} I_{\ell-1}(t,s;q_1,\cdots,q_{\ell-1})\, q_\ell(s)\cdot$$

$$\cdot\int_s^\infty I_{n-\ell-1}(r,s;q_{n-1},\cdots,q_{\ell+1})\, q_n(r)\, G(r, q_0(h(r))y(h(r)))\,dr\,ds,\quad t \geq t_1,$$

が正の解 $y(t)$ を持つことが分る。$z(t) = q_0(t)y(t)$ とおけば $z(t)$ は方程式 (M_n^+, G, h) または (M_n^-, G, h) の degree ℓ の解になる。しかしこれは仮定に反して矛盾。//

定理1では $\int_a^\infty p_i(t)dt = \int_a^\infty q_i(t)dt = \infty$ $(1 \leq i \leq n-1)$ を仮定した。この条件が満たされないと，定理1の結論は成立たないことが次の例で示される。

例1. 方程式

(7) $\quad (t^3x'(t))' + t^3x^3(t) = 0, \quad t \geq 1,$

(8) $\quad (t^3x'(t))' + t^3x^3(t^{\frac{1}{3}}) = 0, \quad t \geq 1,$

を考える。方程式(8)は振動である。(すべての解が振動であると言うこと。) しかし方程式(7)は非振動解 $x(t) = \frac{1}{t}$ を持つ。

このような一般の場合の比較定理として次を挙げる。

定理2. $F(t,x)\,\mathrm{sgn}\,x \geq G(t,x)\,\mathrm{sgn}\,x$ と仮定する。

(i) (L_n^+, G, g) が性質 A を持てば, (L_n^+, F, g) も性質 A を持つ.

(ii) (L_n^-, G, g) が性質 B を持てば, (L_n^-, F, g) も性質 B を持つ.

§4. 線型方程式と非線型方程式の比較

線型方程式

(L^+) $\quad L_n x(t) + \lambda d(t) x(g(t)) = 0$

(L^-) $\quad L_n x(t) - \lambda d(t) x(g(t)) = 0$

に対する性質A, B と非線型方程式

(LN^+) $\quad L_n x(t) + \mu d(t) F(x(g(t))) = 0$

(LN^-) $\quad L_n x(t)$ [redacted] $\mu d(t) F(x(g(t))) = 0$

に対する性質A, B を比較する簡単な原理を紹介する.

定理3. $d: [a,\infty) \to (0,\infty)$ は連続, $F: R \to R$ は連続で $xF(x) > 0$ $(x \neq 0)$ とする. さらに,

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{|F(x)|}{|x|} = \infty$$

と仮定する。 $\liminf_{t\to\infty} p_0(t) > 0$ とする。

(i) ある正数 $\lambda > 0$ に対して (L^+) が性質 A を持てば, 任意の正数 μ に対して (LN^+) は性質 A を持つ.

(ii) ある正数 $\lambda > 0$ に対して (L^-) が性質 B を持てば, 任意の正数 μ に対して (LN^-) は性質 B を持つ.

(i) の証明のあらましを述べる. ある $\mu > 0$ に対して (LN^+)

が性質Aを持たないと仮定すれば，(LN^+) は degree l $(1\le l\le n-1)$ の非振動解 $x(t)$ を持つ。t が十分大ならば $x(t)>0$ と仮定してよい。$\lim_{t\to\infty} D^0(x;p_0)(t)=\infty$ が成立つ。実際，n が奇数ならば，l は2以上の偶数であるから，これは明らか。n が偶数とする。$l=1$ の場合だけを吟味すればよい。もし $\lim_{t\to\infty} D^0(x;p_0)(t)$ が有限ならば，補題5によって

$$\int^\infty K_{n-1}(t)\,a(t)\,F(c\,p_0(g(t)))\,dt<\infty$$

となるような正の定数 $c>0$ が存在する。この不等式は

$$\int^\infty K_{n-1}(t)\,a(t)\,p_0(g(t))\,dt<\infty$$

を導くことに注意すると，再び補題5によって，線型方程式 (L^+) が 正の　　　　　　　非振動解を持つことになり，仮定に反する。従って $\lim_{t\to\infty} D^0(x;p_0)(t)=\infty$．$p_0(t)$ に対する仮定から，$\lim_{t\to\infty} x(t)=\infty$ がある。この事実と $F(x)$ に対する仮定から，T が十分大ならば，$t\ge T$ において $F(x(g(t)))\ge \frac{\lambda}{\mu}x(g(t))$ が成立つことが分る。これを (LN^+) に持ち込めば，

$$L_n x(t)+\lambda a(t)\,x(g(t))\le 0,\quad t\ge T.$$

が得られる。ここで補題4の(i)を用いると，方程式 (L^+) に degree l の解が存在するという結論に達する。これは矛盾である。//

例2. 常微分方程式

$$(t^{\alpha+m}x^{(m)}(t))^{(m)}+\lambda t^{\alpha-m}x(t)=0,\quad t\ge 1,$$

を考える。α と $\lambda>0$ は定数で $\alpha \leq -m+1$ とする。λ が十分大ならば，この方程式は振動である（Kusano and Naito [8] 参照）.
従って，$g(t) \geq t$ ならば，定理1によって，方程式

$$(t^{\alpha+m}x^{(m)}(t))^{(m)}+\lambda t^{\alpha-m}x(g(t))=0,\quad t\geq 1,$$

は振動である。よって，$F(x)$ が定理3の条件を満たすならば方程式

$$(t^{\alpha+m}x^{(m)}(t))^{(m)}+\mu t^{\alpha-m}F(x(g(t)))=0,\quad t\geq 1,$$

は任意の $\mu>0$ に対して振動である。（Kreith, Kusano and Naito [7] 参照）.

§5. 常微分方程式から遅れ型方程式へ

§3 で述べた比較定理は，ある $h(t)$ なる deviating argument を持つ方程式に対する性質 A もしくは性質 B から，$h(t)$ より大きい deviating argument $g(t)$ $(g(t)\geq h(t))$ を持つ他の方程式に対する性質 A もしくは性質 B を導き出す原理を与えるものであった。この方向と逆の方向を辿ることは可能であろうかという問が生じる。以下この問に答える。

定理 4. $g(t)\geq h(t)$, $g'(t)>0$, $h'(t)>0$ と仮定する。

(i) 方程式

$$L_n x(t)+\frac{g'(t)p_n(h^{-1}(g(t)))}{h'(h^{-1}(g(t)))p_n(t)}F(h^{-1}(g(t)),x(g(t)))=0$$

が性質Aを持つならば，方程式

$$L_n x(t) + F(t, x(h(t))) = 0$$

は性質Aを持つ。

(ii) 方程式

$$L_n x(t) - \frac{g'(t)\,p_n(h^{-1}(g(t)))}{h'(h^{-1}(g(t)))\,p_n(t)} F(h^{-1}(g(t)), x(g(t))) = 0$$

が性質Bを持つならば，方程式

$$L_n x(t) - F(t, x(h(t))) = 0$$

は性質Bを持つ。

注意. 特に $g(t) \equiv t$ の場合，常微分方程式に対する性質Aもしくは性質Bを知って，遅れ型微分方程式に対する性質Aもしくは性質Bを示す原理になっている。

例 3. 定理4によれば，常微分方程式

(9) $$D^n(x; 1, p, \cdots, p, 1)(t) + \frac{\alpha(h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))} x(t) = 0$$

が性質Aを持てば，遅れ型方程式

(10) $$D^n(x; 1, p, \cdots, p, 1)(t) + \alpha(t) x(h(t)) = 0$$

は性質Aを持つ. ここで $\alpha, p : [a, \infty) \to (0, \infty)$ は連続で $\int_a^\infty p(t)\,dt = \infty$ とする。 Kusano and Naito [8] の結果によれば，(9) は以下の条件の下で性質Aを持つ: $P(t) = \int_a^t p(s)\,ds$ とおく.

(a) $\int^\infty [P(h(t))]^{n-2} \alpha(t)\,dt = \infty$; または

(b) $\int^\infty [P(h(t))]^{n-2} \alpha(t)\,dt < \infty$ かつ

$$\liminf_{t\to\infty} P(h(t))\int_t^{\infty}[P(h(s))-P(h(t))]^{n-2}\alpha(s)ds > \frac{(n-2)!}{4}.$$

従って (a) または (b) が成立つとき，遅れ型方程式 (10) は性質A を持つ。

定理 5. $g(t) \geq h(t)$, $g'(t)>0$, $h'(t)>0$ と仮定する。
$\tau(t)=h(g^{-1}(t))$ とおき，微分作用素 $\mathcal{L}_n$ を次のように定義する：

$$\mathcal{L}_n=\frac{1}{p_n(t)}\frac{d}{dt}\frac{1}{p_{n-1}(\tau(t))\tau'(t)}\frac{d}{dt}\cdots\frac{d}{dt}\frac{1}{p_1(\tau(t))\tau'(t)}\frac{d}{dt}\frac{\cdot}{p_0(\tau(t))}.$$

(i) 方程式

$$\mathcal{L}_n x(t)+F(t,x(g(t)))=0$$

が性質A を持つならば，方程式

$$L_n x(t)+F(t,x(h(t)))=0$$

は性質A を持つ。

(ii) 方程式

$$\mathcal{L}_n x(t)-F(t,x(g(t)))=0$$

が性質B を持つならば，方程式

$$L_n x(t)-F(t,x(h(t)))=0$$

は性質B を持つ。

§6. deviating arguments に大小関係がない場合の比較

最近，Brands [1] は，$g_1(t)-g_2(t)$ が有界の場合，二つの方程式

$$x''(t)+F(t,x(g_1(t)))=0 \quad と \quad x''(t)+F(t,x(g_2(t)))=0$$

は同じ振動性を持つという興味深い結果を得た。この結果はFoster and Grimmer [2] によって，高階の方程式

$$x^{(n)}(t)+F(t,x(g_1(t)))=0 \quad と \quad x^{(n)}(t)+F(t,x(g_2(t)))=0$$

に拡張された。これがさらに一般の微分作用素 L_n を含む方程式に拡張されるのではなかろうかと予想の下で筆者は計算を試みたが，満足すべき段階には到達していない。ここでは定理5を用いて証明できる結果を一つ述べておく。

定理6. $p_i(t)$, $0 \leqq i \leqq n-1$, は単調非増加とする。$g_1(t)$, $g_2(t)$ は連続で $\lim_{t\to\infty} g_i(t)=\infty$, $i=1,2$, かつ $|g_1(t)-g(t)|$, $|g_2(t)-g(t)|$ が有界であるような C^1 関数 $g(t)$ $(g'(t)>0)$ が存在すると仮定する。

(i) 方程式

$$L_n x(t)+F(t,x(g_1(t)))=0$$

が性質Aを持つのは，方程式

$$L_n x(t)+F(t,x(g_2(t)))=0$$

が性質Aを持つとき，しかもそのときに限る。

(ii) 方程式

$$L_n x(t)-F(t,x(g_1(t)))=0$$

が性質Bを持つのは，方程式

$$L_n x(t)-F(t,x(g_2(t)))=0$$

が性質 B を持つとき，しかもそのときに限る。

§7. 外力項がある場合とない場合の比較

この節の目的は，n が偶数の場合，方程式 (L_n^+, F, g) の振動性と，これに外力項 $\varphi(t)$ を付け加えた方程式

$$(L_n^+, F, g, \varphi) \qquad L_n x(t) + F(t, x(g(t))) = \varphi(t)$$

の振動性の比較を行うことである。主な結果は次の通りである。

定理 7. L_n, F, g は §1 の条件を満たすものとし，$\varphi: [a,\infty) \to R$ は連続とする。さらに，次の条件を満たす関数 $v, w \in \mathcal{D}(L_n)$ が存在すると仮定する：

$$L_n v(t) = \varphi(t), \qquad \liminf_{t\to\infty} D^0(v; p_0)(t) = 0, \quad v(t) \text{は振動または負},$$
$$L_n w(t) = \varphi(t), \qquad \limsup_{t\to\infty} D^0(w; p_0)(t) = 0, \quad w(t) \text{は振動または正}.$$

このとき，もし方程式 (L_n^+, F, g) が振動ならば，方程式 (L_n^+, F, g, φ) も振動である．

注意．この定理は，$L_n = d^n/dt^n$ の場合に対する Kartsatos [3, 4] の結果と McCann [12] の結果を本質的に拡張したものである。

定理 8. L_n, F, g, φ は上と同様とする．条件

$$L_n u(t) = \varphi(t), \qquad \lim_{t\to\infty} D^0(u; p_0)(t) = 0$$

を満たす関数 $u \in \mathcal{D}(L_n)$ が存在し，$u(t)$ は振動であるとする。

このとき，方程式 (L_n^+, F, g, φ) が振動であるのは，方程式 (L_n^+, F, g) が振動であるとき，しかもそのときに限る．

これらの事実の証明には，次の補題が重要な役割を果す．

補題6．L_n, M_n, F, G, g は§1の条件を満たし，

$$p_i(t) \geq q_i(t), \quad 0 \leq i \leq n; \qquad F(t,x)\,\mathrm{sgn}\,x \geq G(t,x)\,\mathrm{sgn}\,x$$

が成立つと仮定する．φ, $\psi : [a,\infty) \to R$ は連続で，次の条件を満たす関数 $v \in \mathcal{D}(L_n)$, $w \in \mathcal{D}(M_n)$ が存在すると仮定する：

$$L_n v(t) = \varphi(t), \qquad \liminf_{t\to\infty} D^0(v;p_0)(t) = 0,$$

$$M_n w(t) = \psi(t), \qquad \liminf_{t\to\infty} D^0(w;q_0)(t) = 0,$$

$$\liminf_{t\to\infty} \left[D^0(v;p_0)(t) - D^0(w;q_0)(t) \right] = 0.$$

このとき，もし方程式 (L_n^+, F, g, φ) が $\liminf_{t\to\infty} D^0(x;p_0)(t) > 0$ を満たす解を持つならば，方程式 (M_n^+, G, g, ψ) は $\liminf_{t\to\infty} D^0(x;q_0)(t) > 0$ を満たす解を持つ．（詳細は Kusano and Naito [11] 参照）

§8．性質Cに関する比較定理

方程式 $(L_n^\pm, F, g)$, $(M_n^\pm, G, h)$ に対する性質Cに関して，次の比較定理が成立つ．

定理9．L_n, M_n, F, G, g, h は§1の条件を満たすとし，さらに次の仮定をおく：

$$g(t) \leq h(t) < t$$

$$p_0(g(t)) \geq q_0(h(t))$$

$$p_i(t) \geq q_i(t), \qquad 1 \leq i \leq n.$$

$$F(t,x)\,\mathrm{sgn}\,x \geq G(t,x)\,\mathrm{sgn}\,x$$

このとき，方程式 $(M_n^{\pm}, G, h)$ が性質Cを持てば，方程式 $(L_n^{\pm}, F, g)$ は性質Cを持つ．

証明のあらまし．方程式 $(L_n^{\pm}, F, g)$ が性質Cを持たないと仮定する。この方程式に対して $N_0 \neq \phi$ である．$x \in N_0$ とする．t が十分大きいとき $x(t) > 0$ と仮定してよい。補題2によって

$$D^0(x;p_0)(t) \geq c + \int_t^{\infty} I_{n-1}(r,t;p_{n-1},\cdots,p_1)\,p_n(r)\,F(r, x(g(r)))\,dr$$

が十分大きい t に対して成立つ．ここで $c = \lim_{t\to\infty} D^0(x;p_0)(t) \geq 0$．定理の仮定を用いれば次の不等式が得られる：

$$D^0(x;p_0)(t) \geq c + \int_t^{\infty} I_{n-1}(r,t;q_{n-1},\cdots,q_1)\,q_n(r)\,G(r, q_0(h(r)) \times \times D^0(x;p_0)(h(r)))\,dr$$

補題3の(ii)と $h(t) < t$ なる条件を用いて，積分方程式

$$y(t) = c + \int_t^{\infty} I_{n-1}(r,t;q_{n-1},\cdots,q_1)\,q_n(r)\,G(r, q_0(h(r))\,y(h(r)))\,dr$$

に正の解 $y(t)$ が存在することが示される。$z(t) = q_0(t)\,y(t)$ とおけば，この $z(t)$ は方程式 $(M_n^{\pm}, G, h)$ の degree 0 の解になる。しかしこれは不合理である。//

線型方程式に対する性質Cから，非線型方程式に対する性質Cを導き出す一つの原理を挙げよう。

定理10．ある正数 $\lambda > 0$ に対して方程式

$$L_n x(t) + (-1)^{n+1} \lambda \alpha(t) x(g(t)) = 0$$

が性質Cを持つとする．ただし $\alpha : [a, \infty) \to [0, \infty)$ は連続．

$F : R \to R$ は連続，$xF(x) > 0$ $(x \neq 0)$ かつ

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{|F(x)|} = 0$$

が成立つと仮定する。$\limsup_{t \to \infty} p_0(t) < \infty$ ならば，方程式

$$L_n x(t) + (-1)^{n+1} \mu \alpha(t) F(x(g(t))) = 0$$

は任意の正数 $\mu > 0$ に対して性質Cを持つ．

例 4. Koplatadze and Čanturija [6] は，$g(t) < t$ で，

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{g(t)}^{t} [s - g(t)]^p [g(t) - g(s)]^{n-p-1} \alpha(s) ds > p!(n-p-1)!$$

となる整数 p $(0 \leq p \leq n-1)$ があれば，方程式

$$x^{(n)}(t) + (-1)^{n+1} \alpha(t) x(g(t)) = 0$$

に対して $N_0 = \phi$ が成立つことを示した。この事実と定理10を用いると，$g(t) < t$ で，

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{g(t)}^{t} [s - g(t)]^p [g(t) - g(s)]^{n-p-1} \alpha(s) ds > 0$$

となる整数 p $(0 \leq p \leq n-1)$ があれば，方程式

$$x^{(n)}(t) + (-1)^{n+1} \alpha(t) x^{\gamma}(g(t)) = 0 \qquad (0 < \gamma < 1,\ \gamma \text{は奇数の比})$$

に対して $N_0 = \phi$ が成立つことが分る。（論文[10]参照）

参考文献

1. J. J. A. M. Brands, Oscillation theorems for second-order functional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 63(1978), 54-64.

2. K. E. Foster and R. C. Grimmer, Nonoscillatory solutions of higher order delay equations, to appear.

3. A. G. Kartsatos, On the maintenance of oscillations of nth order equations under the effect of a small forcing term, J. Differential Equations 10(1971), 355-363.

4. A. G. Kartsatos, Maintenance of oscillations under the effect of a periodic forcing term, Proc. Amer. Math. Soc. 33(1972), 377-383.

5. Y. Kitamura and T. Kusano, Nonlinear oscillation of higher-order functional differential equations with deviating arguments, to appear in J. Math. Anal. Appl.

6. R. G. Koplatadze and T. A. Čanturija, On the oscillatory properties of differential equations with deviating arguments, Tbilisi State Univ., 1977. (Russian)

7. K. Kreith, T. Kusano and M. Naito, Oscillation criteria for weakly superlinear differential equations of even order, J. Differential Equations (to appear).

8. T. Kusano and M. Naito, Oscillation criteria for a general linear ordinary differential equation, submitted for publication.

9. T. Kusano and M. Naito, Comparison theorem for functional differential equations with deviating arguments, submitted for publication.

10. T. Kusano and M. Naito, Oscillation theorems of comparison type for nonlinear differential equations with deviating arguments, in preparation.

11. T. Kusano and M. Naito, Oscillation theory for perturbed ordinary differential equations with application to partial differential equations, in preparation.

12. R. C. McCann, On the oscillation of solutions of forced even order nonlinear differential equations, to appear in Hiroshima Math. J.