数理解析研究所講究録
第379巻 1980年 92-105

関数微分方程式の非線形周期系の周期解の存在について

岩手大 教育　古用哲夫

1. まえがき

最近，S. Busenberg と K.L. Cooke は，論文[1]で，次のスカラー差分微分方程式を考えている。

(E) $$x'(t) = p(t)x(t-h)(1-x(t)) - cx(t), \quad t \geqq 0,$$

ここで，c, h は正の定数で，$p(t)$ は最小周期 $\omega>0$ をもち，正で連続な周期関数である。方程式(E)は，蚊などの病毒媒介昆虫によって媒介される流行病の患者の比率をモデルとしている。彼らの，このモデルを研究する動機は，ある種の流行病の周期的な発生を説明することである。[1]において，cが，ある臨界値c_hより小さければ正の周期解が存在し，$c \geqq c_h$であれば正の周期解は存在しないことが示されている。以下では，[1]の ideas を用いて，(E)よりも一般の方程式に対して，同様の問題を考える。

2. 記号と仮定

$I=[0,\infty)$, $R=(-\infty,\infty)$ とする。I 上で定義されている連続なスカラー周期関数 $u(t)$ に対し, $\check{u}=\min_{t\in I} u(t)$, $\hat{u}=\max_{t\in I} u(t)$ とし, 与えられた $h>0$ に対し,

$$\mathcal{C}^h=\{\varphi:[-h,0]\to R,\ \text{連続}\},$$

$$\mathcal{C}^h_+=\{\varphi\in\mathcal{C}^h;\ \varphi(\theta)\geqq 0 \text{ for } \theta\in[-h,0]\},$$

とする。以下で, norm は全て supremum norm とする。$-h\leqq s<A$ $(A>0)$ で定義された連続関数 $x(s)$ と, 任意に固定した t, $0\leqq t<A$, に対し, x_t で $x(s)$ の $[t-h,t]$ への制限を表わす。すなわち, x_t は, $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $-h\leqq\theta\leqq 0$, なる $\mathcal{C}^h$ の元である。

次のような, スカラーの関数微分方程式を考える。

(1) $$x'(t)=p(t)f(t,x_t)-c(t)x(t),\quad t\geqq 0,$$

ここで, $p(t)$, $c(t)$ は周期 $\omega>0$ をもった連続な周期関数で, $p(t)>0$ とする。集合, C^h_ω, K, K_r をそれぞれ,

$$C^h_\omega=\{x:[-h,\infty)\to R,\ x(t)\text{は連続で }\omega\text{-periodic}\},$$

$$K=\{x\in C^h_\omega:\ x(t)\geqq 0 \text{ for all } t\in[-h,\infty)\},$$

$$K_r=\{x\in K:\ 0\leqq x(t)\leqq r \text{ for all } t\in[-h,\infty)\},$$

と定義する。$f(t,\varphi)$ に対し, 必要に応じて, 次の内の幾つかを仮定する。

(H1) $f(t,\varphi)$ は $I\times\mathcal{C}^h\to R$ なる functional で, (t,φ) について連続で,

$f(t,\varphi)\geqq 0$ for $\varphi\in\mathcal{C}^h_+$, $f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi)$ for all $t\in I$, $\varphi\in\mathcal{C}^h$.

(H2) $M(r)=\sup\{f(t,\varphi): t\in I,\ 0\leqq\varphi(\theta)\leqq r$ for $\theta\in[-h,0]\}$ に対し, $\lim_{r\to\infty}\frac{M(r)}{r}=0$.

(H3) 連続な functional $\Lambda(t,\varphi)$ で, φ について linear なものが存在して, 次の条件をみたす。

(i) $a\int_0^\omega x(t)dt\leqq\int_0^\omega\Lambda(t,x_t)dt\leqq b\int_0^\omega x(t)dt$ for $x\in K$, ただし, a, b は正の定数である。

(ii) $\dfrac{\Lambda(t,\varphi)-f(t,\varphi)}{|\varphi|}\to 0$ uniformly in t as $\varphi\ (\in\mathcal{C}^h_+\setminus\{0\})\to 0$.

(H4) $t\in I$ と $\varphi(\theta)>0$ for $\theta\in[-h,0]$ に対し, $\Lambda(t,\varphi)>f(t,\varphi)$.

3. 正の周期解の存在

ここでは, 不動点定理を用いて, (1)の正の周期解の存在について考える。$x\in C^h_\omega$ に対し, operator G, linear operator L を次のように定義する。

$$(Gx)(t)=x(t)+f(t,x_t),\quad t\geqq 0,$$

$$(Gx)(t)=(Gx)(k\omega+t),\quad -h\leqq t<0,$$

$$(Lx)(t)=e^{-\gamma(t)}\left\{\frac{1}{e^{\gamma(\omega)}-1}\int_0^\omega e^{\gamma(s)}p(s)x(s)ds+\int_0^t e^{\gamma(s)}p(s)x(s)ds\right\},\quad t\geqq 0,$$

$$(Lx)(t)=(Lx)(k\omega+t),\quad -h\leqq t<0,$$

ただし, $\gamma(t)=\int_0^t(c(s)+p(s))ds$ で, $\gamma(\omega)>0$ とし, k は $k\omega>h$ なる最小の自然数とする。$N=L\circ G$ は, C^h_ω 上の operator であるが, この N に対し, 以下の lemmas が成立する。

Lemma 1. $f(t,\varphi)$は(H1), (H2)をみたすとする。このとき，Nは次の性質をもつ。

(i) $\gamma(\omega)>0$であって，

(2) $$d(t)=\frac{1}{e^{\gamma(\omega)}-1}\int_0^{\omega}c(s)e^{\gamma(s)}ds+\int_0^{t}c(s)e^{\gamma(s)}ds>0,\quad t\geqq 0,$$

をみたす任意の$c\in C_\omega^h$に対し，$r=r(c)>0$と$\alpha=\alpha(c)\in(0,1)$が存在して，NはK_rを$K_{\alpha r}$に写す。

(ii) $x(t)$が$0\leqq x(t)\leqq r^*$ for $t\in[-h,\infty)$なる(1)の周期解であるための必要にして十分な条件は$Nx=x$かつ$x\in K_{r^*}$であることである。

証明. $x\in C_\omega^h$のとき$Gx\in C_\omega^h$であることは明らかだから，$x\in C_\omega^h$のとき$Lx\in C_\omega^h$であることを示すことにより，$N=L\circ G: C_\omega^h\to C_\omega^h$を示す。そのためには，$t>0$で$(Lx)(t)$が連続で，$\omega$-periodicであることを示せばよい。$(Lx)(t)$の定義から，明らかに$(Lx)(t)$は$t>0$で連続である。そして，$c(t)$と$p(t)$の周期性により，$\gamma(t)-\gamma(t+\omega)=-\gamma(\omega)$だから，$t>0$で次が成立する。

$$\begin{aligned}(Lx)(t+\omega)&=e^{-\gamma(t+\omega)}\left\{\frac{1}{e^{\gamma(\omega)}-1}\int_0^{\omega}e^{\gamma(s)}p(s)x(s)ds+\int_0^{t+\omega}e^{\gamma(s)}p(s)x(s)ds\right\}\\&=e^{-\gamma(t)}e^{\gamma(t)-\gamma(t+\omega)}\left\{\frac{e^{\gamma(\omega)}}{e^{\gamma(\omega)}-1}\int_0^{\omega}e^{\gamma(s)}p(s)x(s)ds+\int_0^{t}e^{\gamma(s+\omega)}p(s)x(s)ds\right\}\\&=e^{-\gamma(t)}\left\{\frac{1}{e^{\gamma(\omega)}-1}\int_0^{\omega}e^{\gamma(s)}p(s)x(s)ds+\int_0^{t}e^{\gamma(s)}p(s)x(s)ds\right\}=(Lx)(t).\end{aligned}$$

従って，$Lx\in C_\omega^h$であり，$N: C_\omega^h\to C_\omega^h$である。

次に，$\gamma(\omega)>0$と(2)をみたす任意の$c\in C_\omega^h$に対し，$r=r(c)>0$と$\alpha=\alpha(c)\in(0,1)$が存在して，$N: K_r\to K_{\alpha r}$となることを示す。

$$0 \leqq x(\omega) + f(s, x_s) \leqq r + M(r) \quad \text{for } x \in K_r, \ s \geqq 0,$$

だから,

$$0 \leqq (Nx)(t) \leqq (r+M(r))\, e^{-\gamma(t)} \left\{ \frac{1}{e^{\gamma(\omega)}-1} \int_0^\omega e^{\gamma(s)} p(s) ds + \int_0^t e^{\gamma(s)} p(s) ds \right\}$$
$$\leqq (r+M(r))\, e^{-\gamma(t)} \left\{ \frac{1}{e^{\gamma(\omega)}-1} [e^{\gamma(s)}]_{s=0}^{s=\omega} + [e^{\gamma(s)}]_{s=0}^{s=t} - \frac{1}{e^{\gamma(\omega)}-1} \int_0^\omega c(s) e^{\gamma(s)} ds - \int_0^t c(s) e^{\gamma(s)} ds \right\}$$
$$\leqq (r+M(r)) \left[1 - e^{-\gamma(t)} \left\{ \frac{1}{e^{\gamma(\omega)}-1} \int_0^\omega c(s) e^{\gamma(s)} ds + \int_0^t c(s) e^{\gamma(s)} ds \right\} \right] \quad \text{for } t \geqq 0,$$

である。

$$d(t) = e^{-\gamma(t)} \left\{ \frac{1}{e^{\gamma(\omega)}-1} \int_0^\omega c(s) e^{\gamma(s)} ds + \int_0^t c(s) e^{\gamma(s)} ds \right\}, \quad t \geqq 0,$$

は, 仮定から $d(t)>0$ かつ連続で, $x \in C_\omega^R$ のとき $Lx \in C_\omega^R$ となることの証明と同様にして, $d(t+\omega) = d(t)$, $t \geqq 0$, がいえて, 次が成立する。

$$d(t) \geqq m(c) = \min_{t \geqq 0} d(t) > 0, \quad m(c) \leqq d(0) < 1,$$

今, $\alpha = \alpha(c) = \dfrac{2-m(c)}{2}$ とし, $r = r(c)$ を $\dfrac{M(r)}{r} \leqq \dfrac{m(c)}{2(1-m(c))}$ なる数とすると, $0 < \alpha < 1$ であって,

$$0 \leqq (Nx)(t) \leqq \left(1 + \frac{M(r)}{r}\right)(1-m(c))\, r \leqq \frac{2-m(c)}{2}\, r \leqq \alpha r, \quad t \geqq 0,$$

が成立するので, (i) が証明された。

次に, (ii) を示す。先ず $x \in K_{r^*}$, $Nx = x$ とすると, $x(t)$ は $t>0$ で連続的微分可能で,

(*) $$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma(t)} x(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{\gamma(t)} (Nx)(t)\right) = e^{\gamma(t)} p(t) \{ x(t) + f(t, x_t) \},$$

だから,

$$x'(t) + (c(t) + p(t))\, x(t) = p(t) \{ x(t) + f(t, x_t) \},$$

となり, $x(t)$ は (1) の ω-周期解である。

逆に, $x(t)$ を (1) の ω-周期解で, $x \in K_{r^*}$ なるものとする。すると,

(*)が成立するから，

(**) $$x(t) = e^{-\gamma(t)}\left[x(0) + \int_0^t e^{\gamma(s)} p(s)\{x(s) + f(s, x_s)\}ds\right],$$

で従って，

$\binom{*}{**}$ $$x(0) = x(\omega) = e^{-\gamma(\omega)}\left[x(0) + \int_0^\omega e^{\gamma(s)} p(s)\{x(s) + f(s, x_s)\}ds\right],$$

を得る。$\binom{*}{**}$を $x(0)$ について解いて，(**)に代入すれば，

$(Nx)(t) = x(t)$, $t \geqq 0$, で，これから $Nx = x$ といえる。

Lemma 2. $f(t,\varphi)$ は (H1), (H2), (H3) をみたすとし，$N: C_\omega^h \to C_\omega^h$ は Lemma 1 のようとする。このとき，N は completely continuous で，0で，次のような K に関する Fréchet derivative をもつ。

$$(N'(0)x)(t) = e^{-\gamma(t)}\left[\frac{1}{e^{\gamma(\omega)}-1}\int_0^\omega e^{\gamma(s)} p(s)\{x(s) + \Lambda(s, x_s)\}ds + \int_0^t e^{\gamma(s)} p(s)\{x(s) + \Lambda(s, x_s)\}ds\right], \quad t \geqq 0,$$

$$(N'(0)x)(t) = (N'(0)x)(k\omega + t), \quad k\omega > h, \quad \text{for } t \in [-h, 0).$$

$N'(0)$ は C_ω^h 上の operator と見て，compact operator である。

証明. $x \in C_\omega^h$ に対して，$(Nx)(t) = ((L\circ G)x)(t)$ for $t \geqq 0$ である。Lemma 1 (i) の証明と同様にして，$\|Lx\| \leqq \|x\|$ が示されるから，L は連続である。また，$(Lx)(t)$ は

$$\frac{d}{dt}(Lx)(t) = -(c(t) + p(t))(Lx)(t) + p(t)x(t),$$

をみたすから，$\|(Lx)'\| \leqq (\hat{c} + 2\hat{p})\|x\|$ である。従って，L は completely continuous である。一方，G は，明らかに連続で，有界集合を有界集合に写すから，結局，$N = L\circ G$ は，completely continuous である。

次に，Lはlinearで，連続だから，Nの0でのFréchet derivativeは，$N'(0)=(L\circ G')(0)$である。Gの定義と(H3)とから，

$$(G'(0)x)(t)=x(t)+\Lambda(t,x_t),\ t\geqq 0,$$

である。従って，$G'(0)$は連続で，有界集合を有界集合に写す。これと，Lがcompactであることから，$N'(0)$はcompactである。

さて，operator $N'(0)$のスペクトル半径$\rho(N'(0))$を調べる必要がある。以下で，$x,y\in C_\omega^h$に対して，$y\geqq x$は$y-x\in K$を意味し，$y>x$は$y-x$がKの内点であることを意味する。[1]における同様にして，Krein and Rutmanの結果(次のTheorem K1, K2)とNussbaumの結果(次のTheorem N)を用いて，cに対応するoperatorを$N_c'(0)$とするとき，$\rho(N_c'(0))$がcの連続減少関数であることが示される。更に，Lemma 3が成立する。

Theorem K1. Kをconeとし，Aを$K\to K$なるlinear, completely continuous, positive operatorとする。$y\in K\setminus\{0\}$が存在して，$Ay\geqq\lambda y,\ \lambda>0$，とする。このとき，Aは，$\lambda'\geqq\lambda$なる固有値$\lambda'$に対応する固有ベクトル$x\in K$を少なくとも一つもつ。

Theorem K2. Kを内点をもったconeとし，Aは$K\to K$なる，completely continuous, strongly positive, linear operatorとする。このとき，

(a) AはKの内部にunit normの一意なeigenvectorをもつ。

(b) この eigenvector に対応する固有値 $\lambda>0$ は，A のスペクトル半径に等しい。

Theorem N. X を real Banach space とし，各 $c\in[a,b]$, $-\infty<a<b<\infty$, に対し，A_c は $X\to X$ なる compact bounded linear operator とする。また，mapping $c\mapsto A_c$ は，uniform operator topology で連続とする。このとき，mapping $c\mapsto \rho(A_c)$ は，連続である。

Lemma 3. $f(t,\varphi)$ と $N'(0)$ は，Lemma 2 のようとする。このとき，$c_h\in C_\omega^h$ が存在して，$c=c_h$ のとき，$N'(0)x=x$ なる $x\in K\setminus\{0\}$ が存在する。また，$c<c_h$ であれば，$N'(0)x=x$ のとき，$x\notin K\setminus\{0\}$ である。更に，$y\in K\setminus\{0\}$ と $\alpha>1$ が存在して，$N'(0)y=\alpha y$ である。また，$c>c_h$ のとき，$\rho(N'(0))<1$ である。最後に，そのような c_h は，$[a\check{p}, b\hat{p}]\cap[\check{c}_h,\hat{c}_h]\neq\phi$ をみたす。

証明. $N'(0)$ は c に依存しているので，必要に応じて，$N_c'(0)$ と書くことにする。今，$x\in K\setminus\{0\}$ が $N'(0)x=\lambda x$, $\lambda>0$, をみたしているとする。$x(t)$ は ω-periodic かつ連続的微分可能で，次をみたす。

$$\lambda\frac{d}{dt}\{e^{\gamma(t)}x(t)\}=e^{\gamma(t)}p(t)\{x(t)+\Delta(t,x_t)\},$$

すなわち，

$$(*)\qquad x'(t)=\{p(t)(\tfrac{1}{\lambda}-1)-c(t)\}x(t)+\tfrac{1}{\lambda}p(t)\Delta(t,x_t).$$

次に，

$$I_c=\int_0^{\omega}\left[\{p(t)(\tfrac{1}{\lambda}-1)-c(t)\}x(t)+\tfrac{1}{\lambda}p(t)\Delta(t,x(t))\right]dt,$$

とおけば，(*)を0からωまで積分することにより，$I_c=0$である。もし$\lambda<1$であれば，

$$0=I_c\geqq \check{p}\left(\frac{1+a}{\lambda}-1\right)\int_0^{\omega}x(t)dt-\int_0^{\omega}c(t)x(t)dt,$$

であり，$c(t)=a\check{p}$のとき，

$$0\geqq \check{p}\left\{\frac{1+a}{\lambda}-(1+a)\right\}\int_0^{\omega}x(t)dt>0$$

となり，矛盾である。一方，$\lambda>1$であれば，

$$0=I_c\leqq \frac{b\hat{p}}{\lambda}\int_0^{\omega}x(t)dt-\int_0^{\omega}c(t)x(t)dt,$$

となり，これは$c(t)=b\hat{p}$のとき，不可能である。$\rho(N_c'(0))$はcの連続減少関数だから，$\rho(N'_{a\check{p}}(0))\geqq 1\geqq\rho(N'_{b\hat{p}}(0))$であることが，Theorem K2から得られる。従って，$N'_{c_h}(0)x=x$，$x\in K\setminus\{0\}$なる$c_h\in C_\omega^h$が存在して，$[a\check{p},b\hat{p}]\cap[\check{c}_h,\hat{c}_h]\neq\phi$である。また$c<c_h$であれば，$\rho(N_c'(0))>1$だから，$N_c'(0)x=x$のとき，$x\notin K\setminus\{0\}$であり，更に，$y\in K\setminus\{0\}$が存在して，$\alpha=\rho(N_c'(0))>1$に対して，$N_c'(0)y=\alpha y$となることが，Theorem K2から得られる。最後に，$c>c_h$のとき，$\rho(N_c'(0))<1$だから，証明は終わる。

以上の準備のもとに，[2]にある，次のSchmittの定理を用いて，(1)の正の周期解の存在がいえる。

Theorem S. E を real Banach space, $K\subset E$ を cone, D を $0\in E$ の open, bounded, nonempty neighborhood とする。$\bar{D}$ を D の closure とし, $N: K\cap\bar{D}\to K$ を completely continuous operator で $N(0)=0$, N は, 0 で, K に関する Fréchet derivative $N'(0)$ をもつとする。更に次を仮定する。

(i) $x=\lambda Nx$, $0<\lambda<1$, の全ての解 $x\in K$ は $x\notin\partial D$ をみたす。

(ii) $\|y\|=1$ なる $y\in K$ と $\alpha>1$ が存在して, $N'(0)y=\alpha y$ である; そして, $N'(0)x=x$ のとき, $x\notin K\setminus\{0\}$ である。

このとき, N は $K\cap\bar{D}$ に自明でない不動点をもつ。

Theorem. $f(t,\varphi)$ は (H1), (H2), (H3) をみたし, $c\in C_\omega^h$ は $\gamma(\omega)>0$, (2) をみたすとする。このとき, $c_h\in C_\omega^h$ で, $[a_{\check{p}}, b_{\hat{p}}]\cap[\check{c}_h, \hat{c}_h]\neq\phi$ なるものが存在して, 次をみたす。

(i) $c<c_h$ のとき, (1) は正の周期解をもつ; そして更に, (1) の解が r_0 を bound として, ultimately bounded であれば, 正の周期解 $x(t)$ は, $0<x(t)<r_0$ for all $t\geqq -h$ をみたす。

(ii) $f(t,\varphi)$ が更に (H4) もみたし, $c\geqq c_h$ であれば, (1) は正の周期解をもたない。

証明. (i) Theorem S で, $E=C_\omega^h$, $K\subset E$ を先に定義した cone, $D=\{x\in E: \|x\|<r\}$ とする。$K\cap\bar{D}=K_r$ であり, N は Lemmas 1-3 により, Theorem S の, (ii) を除く全ての条件をみたす。$c<c_h$ のとき,

(ii)もみたされ，(1)は正の周期解をもつ。

(ii) (1)が正の周期解 $x \in K_{r*} \setminus \{0\}$ をもっているとする。すると Lemma1 により，$Nx = x$ だから，N の性質により，$x > 0$ である。従って，Nx と $N'(0)x$ の定義と (H4) により，

$$N'(0)x \geq (1+\varepsilon) Nx = (1+\varepsilon) x \quad \text{for some } \varepsilon > 0,$$

である。これと Theorem K1 により，$N'(0)$ は1より大きい eigenvalue に対応する eigenvector をもつ。これは，$c \geq c_h$ のとき $\rho(N'(0)) \leq 1$ であることに反する。従って Theorem が成立する。

4. Theorem の応用

次の差分微分方程式を考える。

$$x'(t) = p(t) F(x(t), x(t-h)) - c\,x(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

ここで，c，h，$p(t)$ は (E) と同様で，$F(x,y)$ は次のような $R \times R$ 上の関数とする。

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-x)y, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \quad y > 1, \\ \min(1,y), & x < 0, \quad y > 0, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

すると，$f(t,\varphi) = F(\varphi(0), \varphi(-h))$ は (H1) をみたす。また，(H2) の $M(r)$ は $M(r) \leq 1$ をみたすから，(H2) も成立する。(H3), (H4) は，$\Lambda(t,\varphi) = \varphi(-h)$，$a = b = 1$ に対して成立する。更に，

$$p(t)F(x,y) - cx < 0 \quad \text{for } x \geqq 1,\ y \in R,$$

$$p(t)F(x,y) - cx > 0 \quad \text{for } x < 0,\ y \in R,$$

だから，(3)の解は，1 を bound として，ultimately bounded で，Theorem により，次が得られる。

Corollary 1. 定数 $c_h \in [\underset{\smile}{p}, \hat{p}]$ が存在して，次が成立する。

(i) $c \geqq c_h$ であれば，(3)は $0<x<1$ に周期解をもたない。

(ii) $0<c<c_h$ であれば，(3)は，$0<x<1$ に周期解をもつ。

次に，$I\times R\times R$ 上で定義された次のような関数 $F(t,x,y)$ を考える。

$$F(t,x,y) = \begin{cases} a(t)x+b(t)y-xy, & t\in I,\ 0\leqq x\leqq b(t),\ 0\leqq y\leqq a(t), \\ a(t)x, & t\in I,\ 0\leqq x\leqq b(t),\ y<0, \\ b(t)y, & t\in I,\ x<0,\ 0\leqq y\leqq a(t), \\ 0, & t\in I,\ x<0,\ y<0, \\ a(t)b(t), & \text{otherwise}, \end{cases}$$

ここで，$a(t)$, $b(t)$ は，非負連続な ω-周期関数で，$\underset{\smile}{a}+\underset{\smile}{b}>0$ とする。この $F(t,x,y)$ に対して，方程式

(4) $$x'(t) = p(t)F(t, x(t), x(t-h)) - c(t)x(t), \quad t\geqq 0,$$

を考える。ここで，h, $p(t)$, $c(t)$ は (1) と同様とする。$f(t,\varphi)=F(t,\varphi(0),\varphi(-h))$ は，(H1)をみたす。(H2) の $M(r)$ は，$M(r)\leqq \hat{a}\hat{b}$ をみたすので，(H2)も成立する。(H3), (H4) は $\Delta(t,\varphi)=a(t)\varphi(0)+b(t)\varphi(-h)$, $a=\underset{\smile}{a}+\underset{\smile}{b}$, $b=\hat{a}+\hat{b}$

に対して，明らかに成立する。従って，Theorem から，(4)に対して，次が得られる。

Corollary 2. $c \in C^h_\omega$ は，$\gamma(\omega) > 0$ と (2) をみたすとする。このとき，$c_h \in C^h_\omega$ で $[a\underline{p}, b\hat{p}] \cap [\underline{c}_h, \hat{c}_h] \neq \phi$ なるものが存在して，$c \geqq c_h$ であれば，(4)は正の周期解をもたず，$c < c_h$ のとき，(4)は正の周期解をもつ。

最後に，方程式

(5) $$x'(t) = p(t)F(x(t-h)) - c(t)x(t), \quad t \geqq 0,$$

を考える。ここで，h, $p(t)$, $c(t)$ は (1) と同様とし，$F(y)$ は，次のような R 上の関数である。

$$F(y) = \begin{cases} \sin y, & |y| \leqq \pi, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

すると，$f(t, \varphi) = F(\varphi(-h))$ は，$\Lambda(t, \varphi) = \varphi(-h)$，$a = b = 1$ に対して，(H1)，(H2)，(H3)，(H4) をみたす。従って (5)に対しても，Theorem により，次が得られる。

Corollary 3. $c \in C^h_\omega$ は $\gamma(\omega) > 0$ かつ (2) をみたすとする。このとき，$c_h \in C^h_\omega$ で，$[\underline{p}, \hat{p}] \cap [\underline{c}_h, \hat{c}_h] \neq \phi$ なるものが存在して，$c \geqq c_h$ であれば，(5)は正の周期解をもたない。また，$c < c_h$ であれば，(5)

は正の周期解をもつ。特に c が定数であって，$\hat{p} < \pi p$ であれば，定数 $c_k \in [p, \hat{p}]$ が存在して，$\hat{p}/\pi < c < c_k$ であれば，(5) は，$0 < x < \pi$ に自明でない周期解をもつ。

References

[1] S. Busenberg and K. L. Cooke, Periodic solutions of a periodic nonlinear delay differential equations, SIAM. J. Appl. Math., 35 (1978), 704-721.

[2] K. Schmitt, Fixed points and coincidence theorems with applications to nonlinear differential and integral equations, Rapp #97, Univ. Cath. de Louvain, Belgium, 1976.