数理解析研究所講究録
第383巻 1980年 95-112

波動方程式に関係したFourier multiplierについて

東大 理　宮地晶彦

§1. 序

波動方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の解uを，tを固定して$(f,g) \longmapsto u(t,\cdot)$という写像と考えて，この写像が$\mathbb{R}^n$上のどの関数空間からどの関数空間への連続写像になるか，という問題が与えられたとしよう。フーリエ変換を用いると，解uは

$$u(t,\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\left(\cos t|\xi|\, \mathcal{F}f(\xi)\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \mathcal{F}g(\xi)\right)$$

と書ける。従って，扱おうとする写像は，

(1) $$f \longmapsto \mathcal{F}^{-1}\left(m(\xi)\, \mathcal{F}f(\xi)\right)$$

という形で，

$$m(\xi) = \cos t|\xi| \quad \sim \quad \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}$$

である。もし関数空間としてソボレフ空間

$$W^{p,s} = \left\{ f \in \mathcal{S}' \;\middle|\; \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi)\right) \in L^p \right\}$$

$$\|f\|_{W^{p,s}} = \left\|\mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi)\right)\right\|_{L^p}$$

のようなものをとり，たとえば $g(x) \equiv 0$ として，有界性

$$\|u(t,\cdot)\|_{W^{q,r}} \leq C \|f\|_{W^{p,s}}$$

が成りたつか，という場合には，上の不等式は

$$\mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi)\right) = h$$

とおきかえてみれば

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{\frac{r-s}{2}} \cos t|\xi| \; \mathcal{F}h(\xi)\right)\right\|_{L^q} \leq C \|h\|_{L^p}$$

と同じであるから，

$$m(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{r-s}{2}} \cos t|\xi|$$

に対する (1) の作用素の $L^p - L^q$ 有界性を問うのと同じである。

そこで，一般に σ を実数として

$$m(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\sigma/2}\, e^{\pm i|\xi|}$$

を考えれば都合がよいであろう。今

$$\psi(\xi) = 0 \quad \text{for } |\xi| \le 1, \quad \psi(\xi) = 1 \quad \text{for } |\xi| \ge 2$$

となるなめらかな関数 ψ をとって，

$$\mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{-\sigma/2} e^{\pm i|\xi|}\, \mathcal{F}f(\xi)\right)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left(\psi(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{-\sigma/2} e^{\pm i|\xi|}\, \mathcal{F}f(\xi)\right)$$

$$+ \mathcal{F}^{-1}\left((1-\psi(\xi))\,(1+|\xi|^2)^{-\sigma/2} e^{\pm i|\xi|}\, \mathcal{F}f(\xi)\right)$$

と分ければ，右辺第2項は $\mathcal{S}$（急減少関数）の関数と f との合成積だからほとんど問題はないであろう。更に $(1+|\xi|^2)^{-\sigma/2}$ という因子を $|\xi|^{-\sigma}$ におきかえてしまっても，

$$f \longmapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\psi(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{-\sigma/2}\, |\xi|^{\sigma}\, \mathcal{F}f(\xi)\right)$$

$$f \longmapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\psi(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{\sigma/2}\, |\xi|^{-\sigma}\, \mathcal{F}f(\xi)\right)$$

はどちらも L^p やリプシッツ空間 Λ_α などでは有界作用素であるから，問題はかわらないであろう。

結局以上のような理由から，

$$m(\xi) = \psi(\xi)\,|\xi|^{-b}\, e^{i|\xi|}, \quad b \in \mathbb{R}$$

なる $m(\xi)$ について作用素 (1) を考えることにしよう。考える関数空間は H^p $(0<p\leq 1)$, L^p $(1<p<\infty)$, BMO および Λ_α $(\alpha\in\mathbb{R})$ である。H^p は Fefferman-Stein [3] に与えられたものとする。以後は, $1<p<\infty$ に対しては, $H^p = L^p$ として H^p, L^p 両方の記号を混用する。ただし H^1 と L^1 は異なる関数空間であるから注意! BMO は John-Nirenberg [4] の空間で, ノルム（正確にはセミノルム）は

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{I:\text{cube}}\ \inf_{c\in\mathbb{C}} \frac{1}{|I|}\int_I |f(x)-c|\,dx$$

である。Λ_α $(\alpha\in\mathbb{R})$ は Taibleson [11] によって与えられたリプシッツ空間 $\Lambda(\alpha;\infty,\infty)$ である。これらの関数空間を次のように並べることにする：

$$X_\rho = \begin{cases} \Lambda_{-n\rho} & \rho<0 \\ BMO & \rho=0 \\ H^{1/\rho} & \rho>0. \end{cases}$$

更に, 必要に応じて L^1, L^∞ および C^k $(k\in\mathbb{Z},\ k>0)$ も考えよう。ここで C^k は k 回連続微分可能な関数で k 回微分まで込めて有界であるもの全体のつくる線型空間で, ノルム

は，

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty}$$

を入れる。

次の記号を用いる。(1) の作用素を簡単に $[m(\xi)]$ と書く：

$$[m(\xi)]:\ f \longmapsto \mathcal{F}^{-1}\big(m(\xi)\,\mathcal{F}f(\xi)\big).$$

$b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$S_b = \left[\psi(\xi)\,|\xi|^{-b}\,e^{i|\xi|}\right],$$

$$K_b = \mathcal{F}^{-1}\left(\psi(\xi)|\xi|^{-b}\,e^{i|\xi|}\right)\ (\in \mathcal{S}').$$

$S_b f = K_b * f$ である。

さてこれから，すべての $b \in \mathbb{R}$ について，S_b が $X_p \longrightarrow X_\sigma$ の有界作用素となる組 (p,σ) を完全に決定しよう。

§2. $S_b: X_p \to X_\sigma$ の有界性，ただし $p \geq 0$.

$p \geq 0$ の範囲では，

$$D_b = \left\{(p,\sigma)\ \middle|\ p\geq 0,\ S_b: X_p \longrightarrow X_\sigma \text{ 有界}\right\}$$

は次のようになる：$b<0$ の時 $D_b = \phi$，$b \geq 0$ の時は，図1，2，3の斜線部。

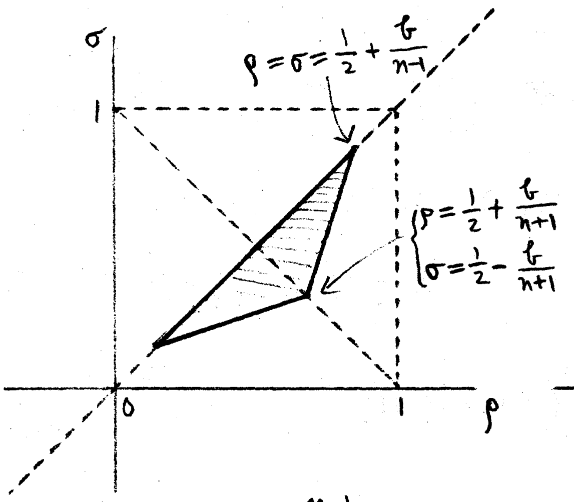

図1. $0\leqq b\leqq\frac{n-1}{2}$ のとき

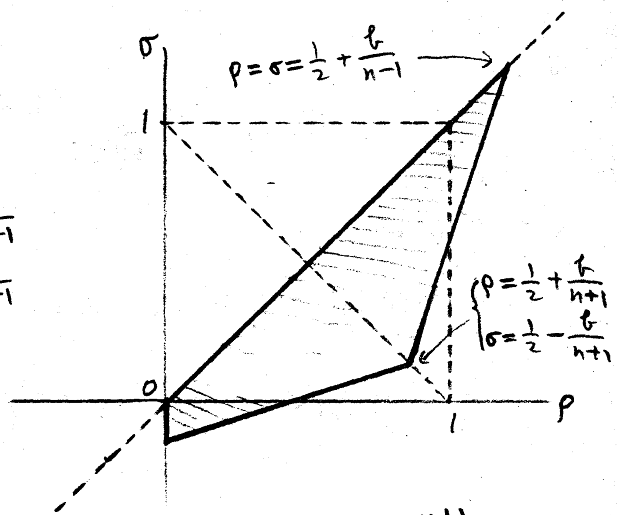

図2. $\frac{n-1}{2}<b\leqq\frac{n+1}{2}$ のとき

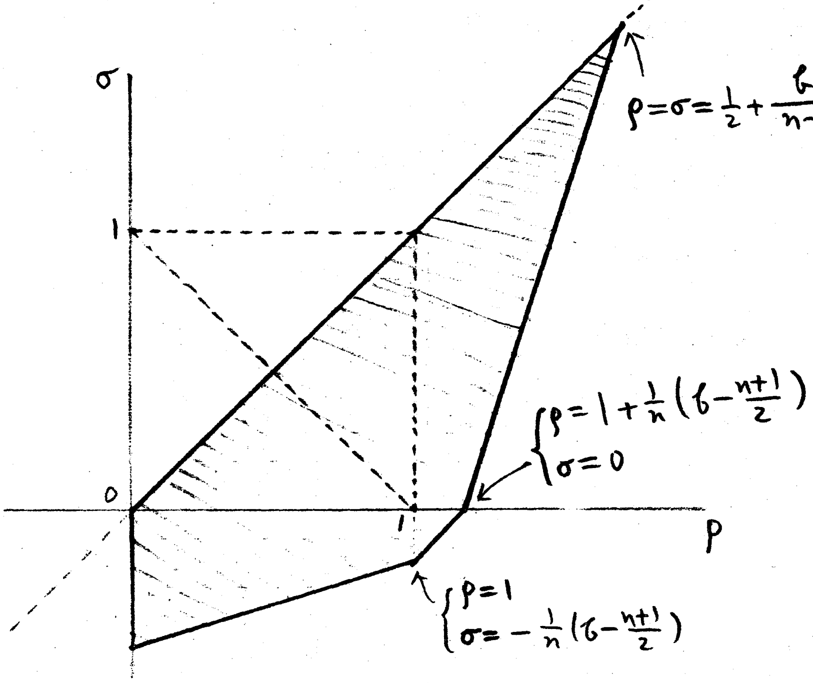

図3. $b>\frac{n+1}{2}$ のとき.

更に，L^1，L^∞ および C^k に関しては，次のことが言える。

(i) $S_b: L^1\to L^1,\ L^\infty\to L^\infty \iff b>\frac{n-1}{2}$.

(ii) $S_b: L^1\to L^\infty \iff b>\frac{n+1}{2}$.

(iii) $S_{\frac{n+1}{2}}: L^1\to BMO,\ H^1\to L^\infty$.

(iv) $\sigma > \frac{n+1}{2}$, $p-\sigma = 1+\frac{1}{n}(\sigma-\frac{n+1}{2})$, $1 \leq p \leq 1+\frac{1}{n}(\sigma-\frac{n+1}{2})$, $-n\sigma$: 整数, のとき $S_\sigma : H^{1/p} \longrightarrow C^{-n\sigma}$.

$L^1 \hookrightarrow H^1$, $L^\infty \hookrightarrow BMO$, $C^k \hookrightarrow \Lambda_k$ であるから, (i)～(iv) は, $(p,\sigma) \in D_\sigma$ となっている (p,σ) と σ について, ある場合には $S_\sigma : X_p \longrightarrow X_\sigma$ の有界性より強い有界性が言えることを, 主張したものである。

§3. 有界性の証明.

§2 の結果のうち肯定的部分は, 次の 2 つの命題が基礎になる:

命題 1. $0 < \sigma < \infty$ の時 $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2} = \frac{\sigma}{n-1}$ とおくと,

$$S_\sigma : H^{p_0} \longrightarrow H^{p_0} \text{ 有界.}$$

命題 2. $0 < \sigma < \frac{n+1}{2}$ のとき

$$S_\sigma : L^{p_1} \longrightarrow L^{p_1'}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{n+1}, \quad \frac{1}{p_1'} = 1 - \frac{1}{p_1}.$$

$\sigma \geq \frac{n+1}{2}$ のとき.

$$S_\sigma : H^{p_2} \longrightarrow L^\infty, \quad \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{n}\left(\sigma - \frac{n+1}{2}\right).$$

命題1は，$p_0 \leq 1$ の時は，H^{p_0} がアトム分解できること（Latter [6]）と，H^{p_0} のノルムが Riesz 変換を用いて L^{p_0} ノルムに帰着できることを用いて，p_0-atom と呼ばれる関数 f に対して，

$$\|S_\delta f\|_{L^{p_0}} \leq C$$

を示すことに帰着される。この評価の証明は，Hölder の不等式と Plancherel の定理だけを用いておこなえる。詳しくは [8]。ただしその評価のために K_δ の挙動を知ることが必要だが，それは次の様である：

補題1. $\forall \delta \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} K_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{|x|=1\}) \\ |x| \longrightarrow \infty \text{ のとき } \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha K_\delta(x) = O(|x|^{-N}) \quad (\forall N, \forall \alpha). \end{cases}$$

$\delta < \frac{n+1}{2} + |\alpha|$ のとき

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha K_\delta(x) = \text{const.}\, x^\alpha (1 - |x| + i0)^{\delta - |\alpha| - \frac{n+1}{2}}$$
$$+ o\left(\left|1 - |x|\right|^{\delta - |\alpha| - \frac{n+1}{2}}\right) \quad \text{as } |x| \longrightarrow 1.$$

$\delta = \frac{n+1}{2}$ のとき

$$K_\delta(x) = \text{const.} \log(1 - |x| + i0) + O(1) \quad \text{as } |x| \longrightarrow 1.$$

$p_0 > 1$ のときの命題1は，補間定理によって証明できる。す

なわち，$0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ に対して作用素 T_z を

$$T_z = \left[\psi(\xi)\, |\xi|^{-\frac{n-1}{2}z} e^{i|\xi|} \right]$$

とおくと，$p_0 = 1$ のときの結果を用いて

$$T_{1+iy} : H^1 \longrightarrow H^1 , \quad \| T_{1+iy} \|_{H^1 \to H^1} \leq C (1+|y|)^N ,$$

また

$$T_{iy} : L^2 \longrightarrow L^2 , \quad \| T_{iy} \|_{L^2 \to L^2} \leq C$$

であるから，$0 < \theta < 1$ の θ について，

$$T_\theta : H^p \longrightarrow H^p , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} .$$

(Calderón-Torchinsky [2] II, pp.151～152) これは，$1 < p_0 < 2$ の場合の命題1の結果に他ならない。

命題2の証明．まず補題1によって，

$$K_{\frac{n+1}{2}}(x) = \log \left| 1 - |x| \right| + (\text{bdd. function})$$

だから，$K_{\frac{n+1}{2}} \in BMO$ である（このことは John-Nirenberg の [4] にある $\log |x| \in BMO$ の証明と同じ方法で証明できる）．故に，$S_{\frac{n+1}{2}} : L^1 \longrightarrow BMO$ であり，Fefferman の不等式

$$\left| \int f(x) g(x)\, dx \right| \leq C \| f \|_{H^1} \| g \|_{BMO}$$

により，$S_{\frac{n+1}{2}} : H^1 \longrightarrow L^\infty$ も言える．　$0 < \delta < \frac{n+1}{2}$ のときの $L^{p_1} \longrightarrow L^{p_1'}$ 有界性は，命題1の証明の時と同様の補間定理を用いて証明される．$\delta > \frac{n+1}{2}$ のときには，

$$S_\delta = S_{\frac{n+1}{2}} \left[|\xi|^{-(\delta - \frac{n+1}{2})} \right]$$

と分解して，

$$\left[|\xi|^{-(\sigma-\frac{n+1}{2})}\right]: H^{p_2} \longrightarrow H^1$$

(fractional integral, Calderón-Torchinsky [2] II, P. 162) と

$$S_{\frac{n+1}{2}}: H^1 \longrightarrow L^\infty$$

とを合成して $S_\sigma: H^{p_2} \longrightarrow L^\infty$ の有界性がわかる。

$S_\sigma: L^p \longrightarrow \Lambda_\alpha$ の有界性は，双対性を利用して $S_\sigma: H^q \longrightarrow L^{p'}$ ($p'=p/(p-1)$, $\alpha=\frac{n}{q}-n$) の有界性から導くことができる。簡単のため $0<\alpha<1$ とする。Taibleson [11] によると，Λ_α のノルムは，

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha}=\|f\|_{L^\infty}+\sup\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

である。そこで，

$$\|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha}=\sup|f(x)-f(y)|/|x-y|^\alpha$$

とおく。Meyer の定理([7])によれば，

$$(2) \qquad \|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha}=\sup_{I:\,\text{cube}}\ \inf_{c\in\mathbb{C}}\frac{1}{|I|^{1+\alpha/n}}\int_I|f(x)-c|\,dx$$

である。双対性 $(L^1)'=L^\infty$ によって

$$(3) \qquad \inf_{c\in\mathbb{C}}\frac{1}{|I|^{1+\alpha/n}}\int_I|f(x)-c|\,dx=\sup\left|\int_I f(x)g(x)\,dx\right|,$$

ただし右辺の sup は，support $g\subset I$, $\|g\|_{L^\infty}\le|I|^{-1-\alpha/n}$ かつ $\int g(x)\,dx=0$ なる g を動かしてとる。(2) と (3) から，

(4) $$\|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha} = \sup \left| \int f(x) g(x)\, dx \right|$$

ただし右辺の sup は，ある cube I に対して前記の条件をみたす g 全体にわたって（I も動かして）とる，すなわち，q を $\alpha = n/q - n$ なる数としたとき，g は q-atom の全体を動かすことになる。さて，(4) を用いると，

(5) $$S_\sigma : L^p \to \tilde{\Lambda}_\alpha \iff \left| \int S_\sigma f \cdot g \right| \leq C \text{ for } \|f\|_{L^p} \leq 1,\ g : q\text{-atom}$$

であるが，実は

$$\int S_\sigma f \cdot g = \int f \cdot S_\sigma g$$

なのであるから，

$$(5)\text{の右辺} \iff \|S_\sigma g\|_{L^{p'}} \leq C \text{ for } g : q\text{-atom}.$$

H^q がアトム分解できることによると，これは S_σ の $H^q \to L^{p'}$ の有界性と同等である。このようにして，

(6) $$S_\sigma : L^p \to \tilde{\Lambda}_\alpha \iff S_\sigma : H^q \to L^{p'}$$

がわかった。命題1と2の結果およびそれらを補間した結果は，適当な $q \leq 1$, $p' \geq 1$ について $S_\sigma : H^q \to L^{p'}$ の有界性を教えているから，(6) に従って $S_\sigma : L^p \to \tilde{\Lambda}_\alpha$ の有界性が得られる。$S_\sigma : L^p \to L^\infty$ の有界性は，$K_\sigma \in L^{p'}$ を見るこ

とによって容易にわかるから，$S_\sigma : L^p \to \tilde{\Lambda}_\alpha$ とあわせて $S_\sigma : L^p \to \Lambda_\alpha$ が言える。

以上のようにして D_σ の端点の (ρ, σ) について $S_\sigma : X_\rho \to X_\sigma$ の有界性はすべて証明できる。その他の $(\rho,\sigma) \in D_\sigma$ については補間定理で示される。

(i) は，補題1を使って $K_\sigma \in L^1$, $\sigma > \frac{n-1}{2}$, を見ることによってわかる。(ii) は，やはり補題1を使って $K_\sigma \in L^\infty$, $\sigma > \frac{n+1}{2}$, を見ることによってわかる。(iii) は命題2で示した。(iv) は，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha S_\sigma f = \left[\xi^\alpha \psi(\xi) |\xi|^{-\sigma} e^{i|\xi|}\right] f$$

$$= \left[\psi(\xi) |\xi|^{-\sigma+|\alpha|} e^{i|\xi|}\right]\left[\xi^\alpha / |\xi|^{|\alpha|}\right] f$$

$$= S_{\sigma-|\alpha|}\left[\xi^\alpha / |\xi|^{|\alpha|}\right] f,$$

$$\left[\xi^\alpha / |\xi|^{|\alpha|}\right] : H^p \to H^p \text{ 有界}, \quad 0<p<\infty,$$

から，$S_\sigma : H^p \to C^k$ が，$S_{\sigma-k} : H^p \to L^\infty$ に帰着されることによって，命題2から導かれる。

§4. 非有界性の証明

$(\rho,\sigma) \notin D_\sigma$ なる (ρ,σ) について $S_\sigma : X_\rho \not\to X_\sigma$ の証明。

(i) 一般に平行移動と可換な線型作用素 T について，もしも $\|Tf\|_{H^q} \leq C \|f\|_{H^p}$, $0<q<p<\infty$ ならば実は $T=0$

である。このことの証明は，Hörmander [5] による $q>1$ の場合の証明（[5] P.96）と同様にできる。

(ii) $S_\sigma : H^p \nrightarrow H^q$ if $\frac{1}{q}-\frac{n}{p}<-\sigma-\frac{n-1}{2}$.

これは，

$$\sigma-\frac{n+1}{2}+\frac{1}{q}<\lambda<\frac{n}{p}-n$$

なる λ をとると，

$$f=\mathcal{F}^{-1}(\psi(\xi)\,|\xi|^{\lambda})\in H^p \text{ かつ } S_\sigma f\notin H^q$$

からわかる。

(iii) $S_\sigma : H^p \nrightarrow \Lambda_\alpha$ if $\frac{n}{p}-n>\sigma-\frac{n+1}{2}-\alpha$.

このことは，$0<\alpha<1$ ならば

$$\sigma-\frac{n+1}{2}-\alpha<\lambda<\frac{n}{p}-n$$

なる λ をとって

$$f=\mathcal{F}^{-1}(\psi(\xi)\,|\xi|^{\lambda})\in H^p \text{ かつ } S_\sigma f\notin \Lambda_\alpha$$

からわかる。作用素 $[(1+|\xi|^2)^{-\beta/2}]$ が $\Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda_{\alpha+\beta}$ の onto の isomorphism であること（Taibleson [11] Theorem 6，P.437）を用いると，実は

(7) $$S_\sigma : X_p \longrightarrow \Lambda_\alpha \iff S_{\sigma+\beta} : X_p \longrightarrow \Lambda_{\alpha+\beta}$$

がわかるから，$\alpha\geqq 1$ の場合は $0<\alpha<1$ の場合に帰着できる。

(iv) $S_\sigma : L^p \nrightarrow \Lambda_\alpha$ if $\frac{1}{p}+\alpha>\sigma-\frac{n-1}{2}$

これは，双対性（§3 の (6)）を用いて (ii) に帰着できる。

§ 5. $S_\sigma : \Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda_\beta$.

この節では α, β, σ はすべて実数（負でもよい）とする。

命題 3. $S_\sigma : \Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda_{\alpha+\sigma-\frac{n-1}{2}}$ 有界.

$$S_\sigma : \Lambda_\alpha \not\longrightarrow \Lambda_\beta \text{ if } \beta > \alpha + \sigma - \frac{n-1}{2}.$$

証明. § 4 の (7) によって，

$$(8) \qquad S_{\frac{n-1}{2}} : \Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda_\alpha$$

$$(9) \qquad S_{\frac{n-1}{2}} : \Lambda_\alpha \not\longrightarrow \Lambda_\beta \text{ if } \beta > \alpha$$

を示せばよい。まず(8) を示す。Taibleson [11] (II. Theorem 2, p.827) により，$K_{\frac{n-1}{2}} \in \Lambda(0;1,\infty)$ を示せばよい。Taibleson による $\Lambda(0;1,\infty)$ の定義に従うと，$[(1+|\xi|^2)^{-\beta/2}] K_{\frac{n-1}{2}} \in L^1$, $\beta > 0$, と，十分大きな k について

$$(10) \qquad \left\| \left[y^k \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k e^{-y|\xi|^2} \right] K_{\frac{n-1}{2}} \right\|_{L^1} \leq C, \quad 0 < y \leq 1$$

とを示せばよい。最初の条件は補題 1 を用いて容易に示せる。2番目の条件を確かめるために，次の補題を用いる。

補題 2. $\varphi^{(j)} \in \mathcal{S}$, $j = 1, \cdots, m$, は次の条件を満たすとする：

$$\forall \xi \neq 0, \ \exists t > 0 ; \ \sum_{j=1}^{m} |\mathcal{F}\varphi^{(j)}(t\xi)| \neq 0.$$

f は Fourier 変換 $\hat{f}$ が原点の近傍で L^1_{loc} であるような緩増加超関数とする。十分大きな数 M と定数 C があり

$$\sum_{j=1}^{m} \left\| f * \left(s^{-n} \varphi^{(j)}\left(\frac{\cdot}{s}\right)\right) \right\|_{L^1} \leq \begin{cases} C, & 0 < s \leq 1 \\ C s^M, & s > 1 \end{cases} \tag{11}$$

が成り立てば，十分大きな k に対して (10) が成り立つ。

この補題は，関数 $\mathcal{F}^{-1}\left(y^k \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k e^{-y|\xi|^2}\right)$ を $s^{-n}\varphi^{(j)}\left(\frac{\cdot}{s}\right)$ の合成積による重ねあわせとしてあらわすこと（その方法は Fefferman-Stein の [3] P.185 にあるテクニックによる）によって証明できる。

さて，補題2によると (10) を示すのに，適当な $\mathcal{S}$ の関数をとって $f = K_{\frac{n-1}{2}}$ に対して (11) を示せばよい。$\varphi^{(j)}$ としてコンパクトな台をもち $\int \varphi^{(j)}(x)dx = 0$ となるものをとると $f = K_{\frac{n-1}{2}}$ に対する (11) は，命題1の $p_0 \leq 1$ の時の証明（Miyachi [8] の Theorem 1 の証明）と同様の計算でできる。

(9) は，

$$f = \mathcal{F}^{-1}\left(\psi(\xi)|\xi|^{-\frac{n+1}{2}-\alpha} e^{-i|\xi|}\right) \in \Lambda_\alpha,$$

$$S_{\frac{n-1}{2}} f = \mathcal{F}^{-1}\left(\psi(\xi)|\xi|^{-n-\alpha}\right) \notin \Lambda_\beta \quad \text{if } \beta > \alpha$$

からわかる。または，次のようにして (9) を示してもよい。もしも $S_{\frac{n-1}{2}} : \Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda_\beta$, $\beta > \alpha$, ならば，

$$S_{\frac{n-1}{2}} = \left[(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}\right] S_{\frac{n-1}{2}} \left[(1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}\right]$$

と考えて，$S_{\frac{n-1}{2}} : \Lambda_0 \longrightarrow \Lambda_{\beta-\alpha}$，従って（$L^\infty \hookrightarrow \Lambda_0$ だから）$S_{\frac{n-1}{2}} : L^\infty \longrightarrow \Lambda_{\beta-\alpha}$，$\beta-\alpha>0$． §3 の (6) によって dual をとって $S_{\frac{n-1}{2}} : H^p \to L^1$，$p<1$；しかしこれは §4 の (ii) と矛盾する。故に $S_{\frac{n-1}{2}} : \Lambda_\alpha \not\to \Lambda_\beta$，$\beta>\alpha$．

§6. NOTE

以上の結果は，S_b のかわりに

$$\left[\psi(\xi)|\xi|^{-b} \sin|\xi|\right] \quad や \quad \left[\psi(\xi)|\xi|^{-b} \cos|\xi|\right]$$

に対しても成りたつ。また $\phi(\xi)$ を，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ でなめらかな 1 次斉次関数で，$\phi(\xi)>0$ かつ曲面 $\{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid \phi(\xi)=1\}$ の Gauss 曲率が 0 にならないような関数とし，$a(\xi), b(\xi)$ をどちらか一方は恒等的に零でない $-b$ 次の斉次関数とすると，

$$\left[\psi(\xi)\left(a(\xi)e^{i\phi(\xi)} + b(\xi)e^{-i\phi(\xi)}\right)\right]$$

についても，同じ結果が成りたつ。（Cf. Miyachi [8].）

命題 1 の証明は，$p_0 \geq 1$ の場合は，Peral の [9] にもあるが，アトム分解を利用したここでの証明法は，簡単でしかも融通性に富み，かつ $p_0<1$ にも適用できる利点を持つ。

命題2の前半の結果は，Strichartz [10] によって知られていた。ここでのBMOを用いる証明法は[10]のものより簡単でかつ融通性に富む。L^p-$L^{p'}$ 有界性の証明法には，Brenner [1] による Littlewood-Paley の定理に基づいた方法もある。

References

[1] Brenner, P., On L^p-$L^{p'}$ estimates for the wave-equation, Math. Z. 145(1975), 251-254.

[2] Calderón, A. P., and Torchinsky, A., Parabolic maximal functions associated with a distribution, I, Advances in Math. 16 (1975), 1-64; II, 24(1977), 101-171.

[3] Fefferman, E. M., and Stein, E. M., H^p spaces of several variables, Acta Math. 129(1972), 137-193.

[4] John, F., and Nirenberg, L., On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. 14(1961), 415-426.

[5] Hörmander, L., Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta Math. 104(1960), 93-140.

[6] Latter, R. H., A characterization of $H^p(\mathbf{R}^n)$ in terms of atoms, Studia Math. 62(1978), 93-101.

[7] Meyer, N. G., Mean oscillation over cubes and Hölder continuity, Proc. Amer. Math. Soc. 15(1964), 717-721.

[8] Miyachi, A., On some estimates for the wave equation in L^p and H^p , to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

[9] Peral, J. C., L^p estimates for the wave equation, to appear in J. Func. Anal.

[10] Strichartz, R. S., Convolution with kernels having singularities on a sphere, Trans. Amer. Math. Soc. 148(1970), 461-471.

[11] Taibleson, M. H., On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space, I, J. Math. Mech. 13(1964), 407-479; II, 14(1965), 821-839; III, 15(1966), 973-981.