数理解析研究所講究録
第 388 巻 1980 年 134-143

ソリトン理論における直接法：方程式の変換

広大　工　　広田　良吾

非線形偏微分方程式を変数変換により，特殊な形式の双線形微分方程式に変換する方法について解説する。

§0. はじめに

戸田先生によって発見された一次元非線形格子の方程式，戸田方程式

$$m\frac{d^2 r_n}{dt^2}=a(2e^{-br_n}-e^{-br_{n-1}}-e^{-br_{n+1}})$$

は $r_n=-\log(1+V_n)$ と変換すると，次の非線形回路方程式となる。

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1+V_n)=V_{n+1}-2V_n+V_{n+1}$$

ここで $m=a=b=1$ とした。さらに $V_n=\frac{d^2}{dt^2}\log\psi_n$ と変換すると，ψ_nは先生によって示されたように次式を満たす。

$$\frac{\psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n{}^2}=1+\frac{d^2}{dt^2}\log\psi_n$$

上式に $\psi_n{}^2$ をかけ，$\log$ の微分を行うと，2次の同次方程式

が得られる。

$$\ddot{\psi}_n \psi_n - \dot{\psi}_n^2 + \psi_{n+1}\psi_{n-1} - \psi_n^2 = 0$$

ここで$\dot{\psi}_n$は時間微分を示す。戸田方程式は上式のように2次形式にすると厳密解（当時は（10年前）2ーソリトン解迄先生によって発見されていた）をcheckするのが容易になる。

一方先生によって戸田方程式は適当なscalingによって、次のKdV方程式（最初にソリトンの存在が数値計算で発見された式）

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

にreduceする事が示されていた。この式も変換 $u = 2(\log f)_{xx}$ によって，次の形の同次方程式になる。

$$f_{tx}f - f_t f_x + f_{4x}f - 4f_{3x}f_x + 3f_{xx}^2 = 0$$

その他当時迄にソリトン解を持つと知られていたsine-Gordon方程式，Modified KdV方程式等も適当な変換によって特殊な形の双線形方程式に帰着する事が分った。これらの方程式はすべて次の2項演算子

$$D_x^n f(x)\cdot g(x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n f(x)\, g(x')\Big|_{x'=x}$$

（nは正の整数）で表現される。例えば上述の戸田方程式の場合は

$$[D_t^2 - 4\sinh^2(D_n/2)]\,\psi_n(t)\cdot\psi_n(t) = 0,$$

KdV方程式では

$$D_x(D_t+D_x^3)f(x,t)\cdot f(x,t)=0$$

と表現される.

この解説では，§1，§2で2項演算子とその拡張について説明し，その性質を使って§3，§4で非線形偏微分方程式の変換を例題について説明する.

§1　2項演算子，D−operator

次式で2項演算子，D−operatorを定義する.

$$D_x^n D_t^m f(x,t)\cdot g(x,t)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^m f(x,t)g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}$$

ここで n，m は0または正の整数とする。f と g がなめらかな関数のとき

$$e^{\epsilon D_x+\delta D_t}f(x,t)\cdot g(x,t)\equiv e^{\epsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)+\delta\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)}f(x,t)\,g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}$$
$$=f(x+\epsilon,t+\delta)\,g(x-\epsilon,t-\delta)$$

である. ただし ϵ，δ は定数.

$n=1$，2，3 のとき具体的に書くと

$$D_x a(x)\cdot b(x)=a_x b-a b_x,$$
$$D_x^2 a(x)\cdot b(x)=a_{xx}b-2a_x b_x+a b_{xx}$$
$$D_x^3 a(x)\cdot b(x)=a_{xxx}b-3a_{xx}b_x+3a_x b_{xx}-a b_{xxx},$$

となる。

定義より次の性質が導かれる.

$$D_x^n a\cdot b=(-1)^n D_x^n b\cdot a,$$

$$D_x^n a \cdot a = 0 \qquad \text{for odd } n.$$

$$D_x^n e^{P_1 x} \cdot e^{P_2 x} = (P_1 - P_2)^n e^{(P_1+P_2)x}, \quad (P_1, P_2 \text{は常数}).$$

$$D_x^n e^{Px} \cdot e^{Px} = 0 \qquad (n > 0).$$

次に方程式を変換するとき重要になる公式，有理関数 $a(x)/b(x)$ の高次微分を D−operator で表現する公式を述べる．

$$e^{\epsilon \frac{\partial}{\partial x}} \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{e^{\epsilon D_x} a(x) \cdot b(x)}{\cosh(\epsilon D_x) b(x) \cdot b(x)} \qquad (*)$$

証明

$$e^{\epsilon \frac{\partial}{\partial x}} \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x+\epsilon)}{b(x+\epsilon)} = \frac{a(x+\epsilon) b(x-\epsilon)}{b(x+\epsilon) b(x-\epsilon)}$$

$$\underset{\text{def}}{=} \frac{e^{\epsilon D_x} a \cdot b}{e^{\epsilon D_x} b \cdot b} = \frac{e^{\epsilon D_x} a \cdot b}{\cosh(\epsilon D_x) b \cdot b}$$

$$(\because \sinh(\epsilon D_x) b \cdot b = 0)$$

上式を ϵ の巾に展開して，同じ巾の項を比較すると，次の公式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{a}{b} = \frac{D_x a \cdot b}{b^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{a}{b} = \frac{D_x^2 a \cdot b}{b^2} - \left(\frac{a}{b}\right) \frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{a}{b} = \frac{D_x^3 a \cdot b}{b^2} - 3\left(\frac{D_x a \cdot b}{b^2}\right) \frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2},$$

etc.

上の公式は変換公式(*)を使わなくても，直接左辺の微分を遂行し，D−operator を使ってまとめても得られる．未知の関係式を探すときにはむしろこの方が有効である．

§2　2項演算子の拡張

2項演算子は u 関数の加法定理と密接な関係がある。これを利用して多項演算子への自然な拡張が考えられる。（名大・理・青木和彦先生の話）

例えば3項演算子として

$$e^{D_x} f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x) \equiv f_1(x+\delta_1)\, f_2(x+\delta_2)\, f_3(x+\delta_3)$$

ここで

$$D_x^n f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x) \equiv \left(\delta_1\frac{\partial}{\partial x}+\delta_2\frac{\partial}{\partial x'}+\delta_3\frac{\partial}{\partial x''}\right)^n f_1(x)\, f_2(x')\, f_3(x'')\Big|_{x''=x'=x}$$

が考えられる。

$u(x)=f_1^{\delta_1}(x)\, f_2^{\delta_2}(x)\, f_3^{\delta_3}(x)$　とおくと u に対する微分は，

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x)=f_1^{\delta_1-1} f_2^{\delta_2-1} f_3^{\delta_3-1}\left(D_x f_1\cdot f_2\cdot f_3\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x)=f_1^{\delta_1-1} f_2^{\delta_2-1} f_3^{\delta_3-1}\left(D_x^2 f_1\cdot f_2\cdot f_3\right) - f_1^{\delta_1} f_2^{\delta_2} f_3^{\delta_3}\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{\delta_i(\delta_i-1)(D_x^2 f_i\cdot f_i)}{2 f_i^2}\right]$$

となる。

3項演算子 D_x に含まれるパラメータ δ_1, δ_2, δ_3 の値によって色々と新しい演算子が定義されるが，それらの間には面白い関係式がある。例えば $\delta_1=1$, $\delta_2=\delta_3=-1$ とすると，

$$\begin{aligned} D_x^n a\cdot b\cdot b &= \left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\partial}{\partial x''}\right)^n a(x)\, b(x')\, b(x'')\Big|_{x''=x'=x} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^n a(x)\, b^2(x')\Big|_{x'=x} \\ &= D_x^n a\cdot b^2 \end{aligned}$$

となり，$\delta_1=1$, $\delta_2=-2$, $\delta_3=0$ とすると，

$$D_x^n a\cdot b = \left(\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial x'}\right)^n a(x)b(x')\Big|_{x'=0}$$
$$\equiv D_{x,2}^n\, a\cdot b$$

となるが，両者の間に次の関係式（ϵは常数）

$$e^{\epsilon D_x} a\cdot b^2 = [e^{\epsilon D_{x,2}} a\cdot b]\,b - e^{\epsilon D_x} a(x)\cdot[(\cosh(\epsilon D_x)-1)\,b\cdot b]$$

が成り立つ。この式をϵの巾で展開して，関係式

$$D_x a\cdot b^2 = (D_{x,2}\, a\cdot b)\,b,$$
$$D_x^2 a\cdot b^2 = (D_{x,2}^2\, a\cdot b)\,b - a(D_x^2\, b\cdot b) \quad (**)$$
etc.

が得られる．上の第２式は（**）後述のKaupの方程式とSawada－Koteraの方程式に対するMiura変換を２次形式化するのに役立つ。

§3　非線形偏微分方程式の変換

次に偏微分方程式を同次微分方程式に変換する事を考える．

$$u_t + \alpha u^n u_x + u_{xxx} = 0 \quad (\alpha は常数)$$

今$u = G/F$　とおくと，有理式の微分に関する公式より

$$\frac{D_t G\cdot F}{F^2} + \alpha\left(\frac{G}{F}\right)^n \frac{D_x G\cdot F}{F^2} + \frac{D_x^3 G\cdot F}{F^2} - 3\,\frac{D_x G\cdot F}{F^2}\,\frac{D_x^2 F\cdot F}{F^2} = 0$$

を得る．この式にF^{n+4}をかけて，まとめると

$$F^{n+2}[(D_t + D_x^3)\,G\cdot F] + (\alpha F^2 G^n - 3F^n D_x^2 F\cdot F)(D_x G\cdot F) = 0$$

となるので，任意関数入を導入して，decouplingを行うと

$$\begin{cases} (D_t + D_x^3)\, G\cdot F = -\lambda D_x G\cdot F, \\ \alpha F^2 G^n - 3F^n D_x^2 F\cdot F = \lambda F^{n+2} \end{cases}$$

が得られる。この同次方程式に $u=G/F$ を不変にするゲージ変換　$G \Rightarrow Gh,\ F \Rightarrow Fh$　を行うと公式

$$D_t Gh\cdot Fh = (D_t G\cdot F)h^2,$$

$$D_x Gh\cdot Fh = (D_x G\cdot F)h^2,$$

$$D_x^3 Gh\cdot Fh = (D_x^3 G\cdot F)h^2 + 3(D_x G\cdot F)(D_x^2 h\cdot h),$$

$$D_x^2 Fh\cdot Fh = (D_x^2 F\cdot F)h^2 + F^2(D_x^2 h\cdot h)$$

によって，

$$\begin{cases} (D_t + D_x^3)\, G\cdot F = -\lambda' D_x G\cdot F \\ \alpha F^2 G^n - F^n D_x^2 F\cdot F = \lambda' F^{n+2}, \end{cases}$$

$$\lambda' = \lambda + 3\left(\frac{D_x^2 h\cdot h}{h^2}\right).$$

のように変換される，この同次方程式は次の $n=0,1,2$ のときに2次形式になる．

(i) $n=0$　のとき，（原式は線形方程式）

$$\begin{cases} (D_t + D_x^3)\, G\cdot F = -\lambda (D_x G\cdot F) \\ \alpha F^2 - 3D_x^2 F\cdot F = \lambda F^2 \end{cases}$$

今 $\lambda=\alpha$　とすると $D_x^2 F\cdot F = 0$ となり，$F=\mathrm{const}$ と選べる。

このとき2次形式

$$(D_t + \alpha D_x + D_x^3)\, G\cdot F = 0$$

は線形方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)G=0$$

になる。

(ii) $n=1$ のとき，（原式はKdV方程式）

$$\begin{cases}(D_t+D_x^3)G\cdot F=-\lambda D_x G\cdot F,\\ \alpha FG-3D_x^2F\cdot F=\lambda F^2,\end{cases}$$

の形の2次形式になる。これから $\lambda=0$ を仮定してソリトン解が得られる。

(iii) $n=2$ のとき，（原式はModified KdV方程式）

$$\begin{cases}(D_t+D_x^3)G\cdot F=-\lambda D_x G\cdot F\\ \alpha G^2-3D_x^2F\cdot F=\lambda F^2\end{cases}$$

の形の2次形式になる。これから $\lambda=0$ を仮定するとソリトン解が得られる。

(iv) $n>2$（nは整数）のときは2次形式に帰着できない。一方原式は完全積分系でない（無限個の保存量が存在しない）事が証明されている。

(v) $n=\frac{1}{2}$ のとき，計算機実験によればSoliton-likeの解があるとの事だが，今の所2次形式化に成功していない。

以上の諸例は，非線形偏微分方程式がソリトン解を持つ事と2次形式化可能性との間に密接な関係がある事を示唆している。

§4　一般化された2項演算子の応用例

Kaup の方程式

$$u_t+u_{5x}+30(u_{3x}u+\frac{5}{2}u_{xx}u_x)+180u^2u_x=0$$

と Sawada-Kotera の方程式

$$\hat{u}_t+\hat{u}_{5x}+15(\hat{u}_{3x}\hat{u}+\hat{u}_{xx}\hat{u}_x)+45\hat{u}^2\hat{u}_x=0$$

は $u=w_x/2$, $\hat{u}=s_x$ とおくと，それぞれ

$$w_t+w_{5x}+15(w_{3x}w_x+(\frac{3}{4})w_{xx}^2)+15w_x^3=0$$

$$s_t+s_{5x}+15s_{3x}s_x+15s_x^3=0$$

となるが，両者の間には次の Miura 変換が存在する.

$$2s_x+w_x+(s-w)^2=0$$

（数研講究録 375. P.129 参照，Fordy & Gibbons; Physics Letters, 75A, 325 (1980)）

一方 Kaup は彼の方程式が次の逆散乱形式

$$\psi_{xxx}+6u\psi_x+3u_x\psi=\lambda\psi, \qquad (\lambda は固有値)$$

$$\psi_t=9\lambda\psi_{xx}-3(u_{xx}+12u^2)\psi_x+3(u_{xxx}+12\lambda u+24u_xu)\psi$$

で表現される事を発見している. この式は $\psi=f'/f$,

$u=\frac{1}{4}\frac{D_x^2f\cdot f}{f^2}$ とおくと，次の2次形式になる。

$$\begin{cases} D_x^3f\cdot f'+3D_xf\cdot g'=4\lambda ff', \\ D_x^2f\cdot f'=fg', \\ D_tf\cdot f'=-\frac{3}{8}D_x^5f\cdot f'+\frac{15}{8}D_x^3f\cdot g'+\frac{15}{2}\lambda D_x^2f\cdot f'. \end{cases}$$

今 $f'=h^2$, $g'=-D_x^2h\cdot h$ とおくと，上の第2式 $D_x^2f\cdot f'=fg'$ は

$D_x^2 f\cdot h^2 + f D_x^2 h\cdot h = 0$ となるがこれは式(＊＊)によって

$$D_{x,2}^2 f\cdot h = 0$$

に等しい。この式は $w=(\log f)_x$, $s=2(\log h)_x$ とおくと，Kaup の方程式と Sawada－Kotera 方程式とを関係づける Miura 変換

$$2s_x + w_x + (s-w)^2 = 0$$

になる。したがって Kaup の逆散乱形式は，λ＝0のとき，2次形式の立場から Kaup の方程式と Sawada－Kotera 方程式を関係づける式と読みかえ可能である。同様の事情が KdV 方程式と Modified KdV 方程式の間で成り立っている事はよく知られている。