数理解析研究所講究録
第 389 巻 1980 年 102-106

KR－理論のSegal-Becker型定理

京大 理　河野 明

§1 序文

$\mathbb{C}P^\infty_\tau$ を conjugate linear involution を持つ無限次元複素射影空間，BR を KR－理論の分類空間とする。V を $\mathbb{Z}/2$ の正則表現とし X τ－space に対して

$$Q_{\mathbb{Z}/2}(X) = \lim_{n\to\infty} \Omega^{nV}\Sigma^{nV}X$$

Atiyah によって BR は同変な無限ループ空間であることが知られている。従って

$$\lambda : \mathbb{C}P^\infty_\tau \longrightarrow BR$$

は同変無限ループ写像

$$\tilde{\lambda} : Q_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{C}P^\infty_\tau) \longrightarrow BR$$

に自然に拡張される。今 $Q_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{C}P^\infty_\tau)$ が分類する τ－cohomology を PR( ) と書くとき

定理 すべての コンパクト τ－space X について

$$\tilde{\lambda}_* : PR^{00}(X) \longrightarrow KR^{00}(X)$$

は全射である。

が成立する。この定理は 永田－西田－戸田 [4] の主定理の少し弱い形であるが，Adams予想の証明等には充分である。ここでは，この定理の表現論による，極めて簡単な証明をあたえることにする。

§2 Real Lie group の誘導表現

$U(n)$ を conjugate linear involution を持つ n 次ユニタリー群， $H=U(1)\times U(n-1)$ を Real subgroup とする。この時 次を得る。

補題1． $i: H\subset U(n)$ を inclusion とする。今 $\mu: H\to U(1)$ を 1st projection $\iota_n: U(n)\to U(n)$ を identity 表現 とする。この時

$$i_!(\mu)=\iota_n$$

が成立する。ただし $i_!: R_R(H)\to R_R(U(n))$ は 橋本 [2] による ~~誘導~~表現である。

証明 $g=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}$ $\theta_1,\cdots\theta_n,\pi$ が $\mathbb{Q}$ 上独立をとる。g は $T^n=\{$対角行列$\}$ の生成元になる。誘導指標の公式を使うために $(U(n)/H)^g$ を決定する。

$$gxH=xH \iff x^{-1}gx\in H \iff x^{-1}T^nx\subset H.$$

H は connected 故 $\exists h\in H$ s.t. $h^{-1}T^nh=x^{-1}T^nx$

従って　$xt_i^{-1} \in N_{U(n)}(T^n)$　よって

$$(U(n)/H)^g \longleftrightarrow N_{U(n)}(T^n)/N_H(T^n)$$

$$\chi_{i_!(\mu)}(g) = \sum_{x \in (U(n)/H)^g} \chi_\mu(x^{-1}gx) = \sum_{j=1}^{n} e^{it_j} = \chi_{\lambda_n}(g)$$

証明終り

§3 定理の証明

橋本 [2] による可換図式

$$\begin{array}{ccc} R_R(H) & \xrightarrow{\alpha} & KR^{00}(E/H) \\ {\scriptstyle i_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ R_R(U(n)) & \longrightarrow & KR^{00}(E/U(n)) \end{array}$$

を考える。ただし E はコンパクト $U(n)\tilde{\times}Z/2$ space で $U(n)$ free　p_* は西田の transfer [3] である。一方明らかに

$$\begin{array}{ccc} KR^{00}(E/H) & \xleftarrow{\tilde{\lambda}_*} & PR^{00}(E/H) \\ \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ KR^{00}(E/U(n)) & \xleftarrow[\hat{\lambda}_*]{} & PR^{00}(E/U(n)) \end{array}$$

は可換である。

さて X が compact 故 $\xi \in KR^{00}(X)$ は X 上の Real vector bdle であるとしてよい。これに associate した主 $U(n)$ ー束の total space を E とするとき

明らかに

$$X = E/U(n)$$

$$\xi = \alpha(\imath_n)$$

$\alpha(\mu)$ は line bundle

が成立する。従って $\exists x \in PR^{00}(E/H)$ s.t. $\hat{\lambda}_*(x) = \alpha(\mu)$

$$\hat{\lambda}_*(p_*(x)) = p_*\hat{\lambda}_*(x) = p_*(\alpha(\mu)) = \alpha\imath_!(\mu) = \alpha(\imath_n) = \xi$$

証明終り.

§4 いくつかの注意

(1) $R_R(H) = R(H)$ $R_R(U(n)) = R(U(n))$ に注意するとき

$$\hat{\lambda}_* : P^0(X) \longrightarrow K^0(X)$$

全射が出る。ただし $P(\ )$ は $Q(CP^\infty)$ が分類する cohomology (これが Segal の結果) また CP^∞ を $BO(2)$ にとりかえて 橋本 [2] 命題 3.1 を使うと 実数体の case を得る。(これが Becker の結果)

橋本 [2] の~~誘導~~表現は Real elliptic 作用素によっても定義出来る。

(2) BR のスケルトンが compact を利用すると

$$\hat{\lambda}_* : PR^{00}(X) \longrightarrow KR^{00}(X)$$ は split epimorphism

を示すことは 簡単である。

参考文献

[1] M.F. Atiyah, K-theory and reality, Quart. J. Math. Oxford Ser. 17 (1966), 367–386.

[2] 橋本 伸 The transfer maps in the KR_G-theory 本講究録

[3] G. Nishida, The transfer homomorphism in equivariant cohomology theories, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978) 435–451

[4] M. Nagata; G. Nishida, H. Toda Segal-Becker theorem for KR-theory, preprint.