数理解析研究所講究録
第390巻 1980年 38-48

パターン形成と乱流構造

電通大　　大路通雄
鍋島秀喜

§1. はじめに

我々の身辺には，秩序と無秩序あるいは必然と偶然の対照が数多く見られる。例えば，結晶構造と気体分子，強磁性と常磁性，レーザーと自然光，信号と雑音，等々。便宜上，ここではじめの方をパターン（かたち），あとの方をケイオス（みだれ）と呼ぶことにしよう。流体運動における層流と乱流もまた，よく知られた代表的な事例であり，層流から乱流への遷移は，その意味でパターンからケイオスに移行する"偶然化"の過程ということができる。もちろん，これらのさまざまな現象は，それぞれに違った物理法則や機構に支配されていて，個々の具体的な特徴は多岐にわたるけれども，近年それらを広義のいわば"相転移"として，なるたけ一般的にとらえようとする共通の問題意識が，とみに高まって来た。そこでは偶然化と逆にケイオスからパターンに移行する

"秩序形成"の過程もまた，広くさまざまな分野で大きな関心を集めている。もともと，そのような認識の起原は決してとくに新しいものでなく，たとえば物理学における協力現象（cooperative phenomena），生物学における形態発生（morphogenesis）や集団生態（population ecology）などの問題には，いずれも早くからパターンを動的な発展過程とみて取り扱う発想があった。これらの，一見全くかけはなれた対象の間に存在する内在的なアナロジーに注目して，Prigogineのグループ[1]やHakenのグループ[2]などが新しい一つの学問分野の構成をこころみていることは，すでに良く知られている通りである。Hakenはそれをシナージェティックス（synergetics）と名づけた。今後この言葉が曽つてのサイバネティックスのようにはっきりした市民権を得るかどうかはともかく，Hakenによればこれはギリシャ語の$\sigma\acute{\upsilon}\nu$（=together）と$\varepsilon\rho\gamma o\nu$（=work）に由来する合成語であって，多数の下部組織（subsystem）の協同による決定論と偶然論の交錯を体系的に研究するもの，とされる。その核心を要約すると，物理的には高度非平衡系の不安定性，数学的には微分方程式の解の分岐（bifurcation）に帰着するということができよう。こうした難しい問題への道がコンピュータの発達と普及によって大きく開かれたことは，これまたいうまでもない。シナージェティックス

で代表される視点と手法は，上に挙げた古くからの諸問題のほかに，化学反応系，神経生理から生物進化さらには社会学や経済学の分野への応用さえも指向しているが，この小論の目的は，さしあたり流体の運動とくに乱流構造におけるパターン形成の可能性について，ささやかな予備的考察を行うことにある．

§2．パターン形成の例

初めに，簡単で良く知られた幾つかの例を引用しておく．

(1) Lotka-Volterra の生態方程式[3)]

えじき（prey）とその天敵（predator）の2種族から成る生態圏のモデルを考える．t を時間，えじきの個体数を $u(t)$，天敵の個体数を $v(t)$ とすれば，それらの消長は微分方程式

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= (\varepsilon_1 - \gamma_1 v)u, \\ \dot{v} &= (\gamma_2 u - \varepsilon_2)v \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

で与えられるであろう．ここに，ε_1，ε_2 はそれぞれの自然増加または減少率（Malthus係数），γ_1，γ_2 は相互作用係数（貪欲係数）で，いずれも正の定数とする．方程式(1)で $\dot{u}=\dot{v}=0$ を満たす平衡解は，$u=v=0$ を除けば

$$u_0 = \varepsilon_2/\gamma_2\ , \qquad v_0 = \varepsilon_1/\gamma_1 \qquad (2)$$

であり，$t=0$ で u，v がこの値をとらない限り，解は u-v

平面で点(u_0, v_0)をかこむ閉曲線となる．すなわち，平衡解(2)は渦心点であって，それ以外の初期値から出発する解は一般には振動を繰りかえし，その際

$$u^{-\varepsilon_2} v^{-\varepsilon_1} \exp(\gamma_2 u + \gamma_1 v) \qquad (3)$$

が保存量となっている．これは2成分の"協力"が，安定な振動というパターンを作る例である．

(2) ブラッセレータ（Brusselator）[4)]

化学物質A，Bが境界（$r=\pm 1$）から1次元的に拡散して中間生成物X，Yを作り，それらの間の反応で生じる最終生成物D，Eは即座に系外に取り除かれるものとする．このような開いた反応拡散系でとくに$2X+Y \rightleftarrows 3X$の型の3分子性素過程を含むモデルをブラッセレータといい，例えばBの濃度分布を一様と仮定して次のような反応方程式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial t} &= -a + D_A \frac{\partial^2 a}{\partial r^2}, \\
\frac{\partial x}{\partial t} &= a - (b+1)x + x^2 y + D_X \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \\
\frac{\partial y}{\partial t} &= bx - x^2 y + D_Y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ただし，各物質の濃度を対応する小文字で表わし，D_A等は拡散係数で，式はいずれも適当に無次元化されている．方程式(4)は平衡解$a=a_0$，$x=a_0$，$y=b/a_0$をもつが，これは必ずしも安定でなく，パラメータの値によっていろいろな形の解が現れる．コンピュータ・シミュレーションによれば，(i) bが小

さいときは準一様な定常解，(ii) b がある値 b_1 を越すと空間的周期性をもった局在型定常解，(iii)さらに $b \geq b_2$ ではリミット・サイクルに対応する時間的周期解，が得られる。解の分岐に伴うこれらの空間的・時間的パターンの形成に対しては，3次の項 x^2y と拡散項の存在が本質的であると考えられる。

(3) Lorenzアトラクタ[5)]

Bossinesq近似による2次元自由対流の方程式は，流れ関数を $\psi(x,z)$，実効温度を $\theta(x,z)$，鉛直の高さを H，温度差を ΔT とすると，慣用の記号で

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x,z)} = \nu\nabla^4\psi + g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x}, \\ &\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(x,z)} = \frac{\Delta T}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2\theta \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

と書かれる。このとき，線形安定解析によればRayleigh数 Ra の臨界値 Ra^* を境にBénard型の定常対流渦が生じることは良く知られている。これは，それ自身一種のパターン形成とみられるが，さらに $Ra \gg Ra^*$ での2次不安定を調べるために，速度場と温度場を2重フーリエ級数に展開して

$$\begin{pmatrix} \psi(x,z) \\ \theta(x,z) \end{pmatrix} = i\sum_{l,n}\begin{pmatrix} \Psi(l,n) \\ \Theta(l,n) \end{pmatrix} e^{i\pi(clx+nz)} \tag{6}$$

とおき，速度場には1モード $\Psi(1,1) \equiv X$，温度場には2モード $\Theta(1,1) \equiv Y$，$\Theta(0,2) \equiv Z$ だけを残せば，(5)は無次元形で

$$\left.\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y,\\ \dot{Y} &= -XZ + \alpha X - Y,\\ \dot{Z} &= XY - \beta Z\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

に帰着する．ただし，$\sigma = \nu/\kappa$，$\alpha = Ra/Ra^*$，$\beta = 4/(1+a^2)$。(7)は全く決定論的な方程式であるにもかかわらず，Raの第2の臨界値Ra^{**}を超えると解は突然に偶然性を示し，X-Y-Z空間内で二つの平衡定常点をかこむ8字型曲線付近で不規則な振動と飛躍を反復することが数値計算によって確められた。この8型曲線を囲む特殊な曲面は，その外部から出発する解がすべてそこに引き込まれて再び脱出することがないので，研究者の名に因みLorenzアトラクタと呼ばれる。むしろある種の偶然化を意味するこの分岐は明らかに前の例とは異なるもので，またX, Y, Zのどれか一つを省いた2変数系ではそのようなことは起こらない。同軸円筒間のTaylor不安定についても最近類似の計算が進められている。[6)]

以上は，いわゆる自律力学系（autonomous dynamical system）

$$\dot{u}_i = F[u_1, \ldots, u_n]\ ;\ i = 1, \ldots, n \qquad (8)$$

に属するほんの数例に過ぎない。そこでは$F=0$を与えるu_{io}が定常平衡解であるが，その性質やそれから遠くはなれた解の挙動は，上のような一見簡単な方程式の場合でも極めて多様であり，当然なお多くの未知な可能性が期待されよう。

§3. 乱れの中のパターン

さきにも触れた通り，Bénard渦やTaylor渦は十分に規則的なパターンであって乱れではない。境界層の不安定化に際して生じるTollmien-Schlichtingの波も同様である。一方，乱流中でも装置の振動や主流の規則的脈動などに直接結びつけられるパターンは，外因性の構造形成であって乱れに内在する性質とはいえない。これらに対し，乱流変動のケイオスの中から乱れ自身がもつ機構によって協力的に自己形成される内因性のパターンはないものであろうか。その意味で，ここ数年来乱流実験の分野で最も関心をもたれている乱流中の組織的運動（ordered motion）[7]は，この面でも非常に興味深い対象であるように思われる。

力学的に見た組織的運動の正体はまだ明らかではないが，実験的研究によって，伴流や混合層などの自由境界乱流では規則性のある巨大渦塊の配列が確認されており，境界層型の壁面乱流では壁領域で間欠的に出現するバースト現象が特徴的である。前者の渦塊はかなり再現性のある成長と合体を反復し，後者のバーストは，壁に接した層内での低速縦縞の形成に続くその爆発的な噴出とこれを埋める比較的おだやかな掃引が一定の順序でくり返す決定論的な過程と考えられている。ただ，それらが発生する場所や時間に偶然的なばらつき

があるため，バックグラウンドの乱流変動に埋没して永い間気づかれずにいたものであろう．これらの組織的運動が外因性でなく乱れに固有の特性であることも，実験的に疑う余地はない．にもかかわらず，組織的運動の理論的説明はほとんど未解決の状況で，大きな課題として今後に残されている．当然そこではさまざまなアプローチの仕方が考えられるはずであり，これをパターン形成の視点からとらえようとして筆者らが現在進めている研究もそのひとつにほかならない．

§4. 自律系としての乱流モデル

組織的運動を見出した実験技術の進歩と並んで，数値計算技術と能力の発展も目覚ましく，個々の乱流変動を第一原理すなわち基礎の運動方程式から直接に計算することさえ企てられるほどになった．実際，もしもNavier-Stokes方程式について変動解を求める数値積分が自由に実行できれば，秩序形成を含む乱流現象のすべての挙動が正確に再現あるいは予知されるであろう．もちろん，現状ではそのような事態は全く非現実的であるし，また仮にそれができたとしても，果たして乱流を理解したといえるかどうかは極めて疑わしい．そこで，現実にはこれに代わるものとして，平均量のレベルで閉じたいわゆる乱流モデル[8)]が用いられる．いま，速度・圧力

等の平均値を大文字，変動分を小文字で表わし，Navier-Stokes方程式の平均をとると，圧縮性を無視した場合

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{P}{\rho}\delta_{ij}+\nu E_{ij}-\overline{u_iu_j}\right),\\&\partial U_i/\partial x_i=0,\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

ただし，$E_{ij}=\partial U_i/\partial x_j+\partial U_j/\partial x_i$ である．乱流モデルは，右辺に現れたReynolds応力 $-\rho\overline{u_iu_j}$ を平均量だけで評価して(9)を閉じるための工夫であり，最も簡単な渦動粘性モデルから現在では最も精巧な応力方程式モデルまでの夥しい試みがある．前者は分子粘性との類推で，経験関数（渦動粘性係数）ν_T を用いて

$$-\overline{u_iu_j}=\nu_T E_{ij}\quad(i\neq j)\qquad(10)$$

と仮定するものであり，後者は厳密な応力方程式

$$\frac{\partial\overline{u_iu_j}}{\partial t}+U_k\frac{\partial\overline{u_iu_j}}{\partial x_k}=\underset{\text{発生}}{G_{ij}}+\underset{\text{消滅}}{D_{ij}}+\underset{\text{拡散}}{T_{ij}}+\underset{\text{緩和}}{R_{ij}}\qquad(11)$$

の右辺を，妥当と思われる物理的仮定に基いてモデル化し，(9)と連立させるが，それらの詳細にはここでは立入らない。

テンソル方程式(11)はそれだけで一般には6成分から成り，そのすべてを考慮することは余りに複雑となるから，実際には流れの型を適当に限定し，対称条件などを利用して取り扱いやすくするのが普通である。例えば，流れ方向 $x_1\equiv x$ への変化が直角方向 $x_2\equiv y$ への変化に比べて小さい2次元剪断層に対しては，分子粘性 ν の寄与を省略するとき成分別記法で

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{DU}{Dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} - \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y}, \\
\frac{D}{Dt}\left(\frac{q^2}{2}\right) &= -\overline{uv}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{c_1}{L}\left(\frac{q^2}{2}\right)^{3/2} + c_2\frac{\partial}{\partial y}\left(qL\frac{\partial q^2}{\partial y}\right), \\
\frac{D}{Dt}\overline{uv} &= -c_3\frac{q^2}{2}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{c_4}{L}\frac{q}{\sqrt{2}}\overline{uv} + c_5\frac{\partial}{\partial y}\left(qL\frac{\partial \overline{uv}}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\right\} \quad (12)
$$

のような形に帰着させることができる。ここに $q^2 = \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}$, $c_1, \ldots, c_5$ は経験定数，L は経験的な特性長さ，$D/Dt \equiv \partial/\partial t + U\partial/\partial x + V\partial/\partial y$ である。従って，方程式(12)が自律系(8)を構成することは明らかであるが，さらに見やすくするために差し当たり対流微分項 $U\partial/\partial x + V\partial/\partial y$ を省略し，かつ

$$
\frac{\partial U}{\partial y} \equiv X, \quad \frac{q^2}{2} \equiv Y, \quad \overline{uv} \equiv Z \qquad (13)
$$

とおいて，(12)の第1式を y で微分すれば，

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{X} &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}, \\
\dot{Y} &= XZ - \frac{A_1}{L}Y^{\frac{3}{2}} + A_2\frac{\partial}{\partial y}\left(LY^{1/2}\frac{\partial Y}{\partial y}\right), \\
\dot{Z} &= -A_3XY - \frac{A_4}{L}Y^{1/2}Z + A_5\frac{\partial}{\partial y}\left(LY^{1/2}\frac{\partial Z}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\right\} \quad (14)
$$

が得られる。ただし，物理的に当然 $Y \geq 0$ でなければならない。左辺をすべて0とする X_0, Y_0, Z_0 が定常平衡解であって，普通はそれを求めればよいが，ここではパターン形成の問題とみて平衡点の特性と高度非平衡解の挙動を調べるために左辺を残すものとする。そこで，初めに拡散項を除いた点線内の2成分系について吟味したところ，定係数 A_1, A_3, A_4 と経験関数 $L(y)$ の通常の値の範囲では，平衡点 Y_0, Z_0 は安定な結節

点であってパターン形成の兆候は見られなかった。このことは，2成分系に対するTyson-Lightの定理と呼ばれるものからみても予想されるところで，恐らく単純化の行きすぎであろう。現在，3成分系の場合あるいはL（またはこれと同等な散逸関数$\varepsilon \sim q^3/L$）を未知数に加えた系の場合について検討を進めている。

パターン形成の理論を発達した乱流に応用する試みは，まだ緒についたばかりであるが，実験・理論の両面から今後の発展が期待されるように思う。

参考文献

1) G. Nicolis and I. Prigogine : Self-Organization in Nonequilibrium Systems — From Dissipative Structures to Order through Fluctuations, (1977) John Wiley & Sons. 小畠陽之助・相沢洋二訳：散逸構造（1980）岩波書店.

2) H. Haken : Synergetics (1978) Springer Verlag.

3) 例えば，「数理を通してみた生命」岩波講座現代生物科学17（1975）第4章.

4) 同上，第3章.

5) E. N. Lorenz : Journ. Atmos. Sci. 20 (1963) 130-141.

6) 八幡英雄：科学（1980）15～21；数理研講究録本号

7) 谷 一郎編：流体力学の進歩 乱流（1980）丸善，第3章.

8) 同上，第4章.