数理解析研究所講究録
第390巻 1980年 186-191

オイラー座標系でのガリレー不変な乱流理論

東大 生研　　吉澤 徴

§1. はじめに

平均流を支配するN－S方程式に現われるレイノルズ応力を決定することは、乱流の統計理論に課せられた主要な課題である。与えられた任意の平均流とレイノルズ応力の間に何らかの関係を見い出すことができれば、我々は平均流に対するN－S方程式を閉じることができる。この目的のためには、平均流の上に乗った小さな乱れ（渦）の統計量、とくに速度相関を知ることが重要になる。[1-3] この小さな乱れの統計を支配するエネルギー・カスケード過程は、平均流および大きな乱れによる流れの効果から無縁でなければならない。すなわち、ガリレー不変でなければならない。この目的のために、まず通常のオイラー座標系における理論が何故破綻をきたすかを示し、次にこの考察に基づいてガリレー不変な2つの物理量を見い出し、理論を構成する。

§2. ガリレー不変な物理量

N－S方程式は波数（k－）空間で

$$\frac{\partial}{\partial t}u^{\alpha}(k;t)+\nu k^{2}u^{\alpha}(k;t)=iM^{\alpha ab}(k)\int_{p}\int_{q}u^{a}(p;t)u^{b}(q;t), \quad (1)$$

ここで

$$\int_{k}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{a=1}^{3}dk^{a},$$
$$\int_{p}\int_{q}=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k-p-q)\prod_{a=1}^{3}dp^{a}\prod_{b=1}^{3}dq^{b},$$
$$M^{\alpha\beta\gamma}(k)=\frac{1}{2}\left(k^{\gamma}D^{\alpha\beta}(k)+k^{\beta}D^{\alpha\gamma}(k)\right),$$
$$D^{\alpha\beta}(k)=\delta^{\alpha\beta}-\frac{k^{\alpha}k^{\beta}}{k^{2}}.$$

また、（1）に対する応答方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{G}^{\alpha\beta}(k;t,t')+\nu k^{2}\hat{G}^{\alpha\beta}(k;t,t')$$
$$=2iM^{\alpha ab}(k)\int_{p}\int_{q}u^{a}(p;t)\hat{G}^{b\beta}(q;t,t')$$
$$+D^{\alpha\beta}(k)\delta(t-t'). \quad (2)$$

（1），（2）より大きな渦、すなわち小さな波数からの流れの効果は2時間速度積、応答に対して次ぎのように書ける：[4)]

$$u^{\alpha}(k;t)u^{\beta}(-k;t'),\ \hat{G}^{\alpha\beta}(k;t,t')$$
$$\propto\ \exp\left(ik^{a}\overline{U}^{a}(t-t')\right),$$
$$\overline{U}^{\alpha}=\int_{p<K}u^{\alpha}(p;t). \quad (3)$$

（3）においてKは大きな渦の代表的波数であり、$\overline{U}^{\alpha}$は大きな渦による対流速度である。乱流エネルギーの大部分が大きな渦に含まれていることより

$$\overline{U}^{\alpha}\sim\int_{p}u^{a}(p;t).$$

(3)より分かるように、オイラー座標系では2時間速度相関、応答を用いるかぎり流れの効果すなわち U^α を除くことはできない。

上の考察より、ガリレー不変な乱流理論を構成するためにまず同時刻相関

$$\langle u^\alpha(k;t)\,u^\beta(k';t)\rangle = \delta(k+k')\,Q^{\alpha\beta}(k;t), \qquad (4)$$

を用いる。次に、流れの効果をもたない応答を見い出すために、我々は流れの効果を記述する応答 $\hat{G}_c(k;t,t')$ を導入する。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{G}_c(k;t,t') + \nu k^2 \hat{G}_c(k;t,t')$$
$$= ik^\alpha \int_p u^\alpha(p;t)\,\hat{G}_c(k;t,t') + \delta(t-t'). \qquad (5)$$

$\hat{G}_c(k;t,t')$ を用いると、流れの効果をもたない応答

$$\langle \hat{G}^{\alpha\beta}(k;t,t')\,\hat{G}_c(-k;t,t')\rangle = J^{\alpha\beta}(k;t,t'), \qquad (6)$$

を作ることができる。本研究においては、2つのガリレー不変な物理量 $Q^{\alpha\beta}(k;t)$, $J^{\alpha\beta}(k;t,t')$ を基本量として理論を構成する。

§3. 理論の構成

ここでは理論の枠組のみを述べ、詳細は文献5,6にゆずる。手続きを要約すると

1) (1)、(2)、(5)の非線型項を摂動項として解き、

$u^\alpha(k;t)$, $\mathcal{G}^{\alpha\beta}(k;t,t')$、$\hat{\mathcal{G}}_c(k;t,t')$を求める。

2)上の解を用いて$Q^{\alpha\beta}(k;t)$, $J^{\alpha\beta}(k;t,t')$を計算する。

(例) $Q^{\alpha\beta}(k;t)=Q^{\alpha\beta}_L(k;t)+----$ 、($Q^{\alpha\beta}_L$は線型項からの寄与を表わす)

3)等方性((例) $Q^{\alpha\beta}(k;t)=\Delta^{\alpha\beta}(k)Q(k;t)$)を仮定し、$Q(k;t)$、$J(k;t,t')$に対する支配方程式を作る。

(例) $(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu k^2)Q(k;t)=$ (Q_L、J_Lの汎函数)

4)DI定式化の適用、すなわちQ_L、J_LをQ、Jで表わし、上式の右辺に代入し最低次を残す($J(k;t,t')$に対する方程式においても同様)。[7] このようにして得られた2つの方程式が我々の理論の基本方程式となる。

§4. 結果

上の2つの基本方程式を用いると、速度相関、スカラー(温度・湿度)相関に対するコルモゴロフ則[8]

$$E(k)=K_0\epsilon^{2/3}k^{-5/3},$$

$$\Theta(k)=\beta\chi\epsilon^{-1/3}k^{-5/3},$$

を導くことができる(ϵ、χはそれぞれ乱流エネルギー、スカラーの散逸割合である)。K_0、βはいわゆるコルモゴロフ定数である。本方法から得られたK_0、βは、Kraichnanのラグランジァン定式化、[9,10] 著者のガリレー変換法[11,12]に

より得られた結果と共に下表に与えられている。

Table. Comparison of theoretical and experimental values of K_o and β.

	K_o	β
Present formalism	1.28	0.58
Lagrangian formalism[9,10]	1.77	0.21
Galilean-transformation approach[11,12]	1.48	0.83
Experiments	∿1.5	∿0.7

実験との比較は、著者の2方法はともにかなりよい結果を与えていることを示している。

本理論は任意の平均流をもつ非一様乱流へ適用することができる。得られた結果（例えばレイノルズ応力）は著者の前の方法から求められたもの[1,2]とほとんど同一であることが示される。

文献

1) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Jpn. 46 (1979) 669.

2) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1665.

3) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1980) 647.

4) A. Yoshizawa and M. Sakiyama: J. Phys. Soc. Jpn. 44 (1978) 1977.

5) A. Yoshizawa: submitted to J. Phys. Soc. Jpn. (1980).

6) A. Yoshizawa and M. Sakiyama: submitted to J. Phys. Soc.

Jpn.

7) R.H. Kraichnan: J. Fluid Mech. 83 (1977) 349.

8) A.S. Monin and A.M. Yaglom: Statistical Fluid Mechanics (The MIT Press, Massachusetts, 1975) vol.2.

9) R.H. Kraichnan: Phys. Fluids 9 (1966) 1728.

10) R.H. Kraichnan: Phys. Fluids 11 (1968) 945.

11) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Jpn. 45 (1978) 1734.

12) A. Yoshizawa and M. Sakiyama: J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1980) 301.