

中単化定理

東大 理 岡田秀一郎

中単化定理. X は非特異射影代数多様体, D は X 上の単純正規交叉因子とする. $D = \sum_{i=1}^N D_i$ は既約分解, D_i は正整数 m_i ($i=1, \dots, N$) を与える. このとき, 有限全射正則写像 $P: \widehat{X} \rightarrow X$ が存在し, 次の条件を満たす.

- (1) \widehat{X} は非特異,
- (2) $\widehat{D} = P^{-1}(D)$ は \widehat{X} 上の単純正規交叉因子,
- (3) $P^* D_i = \sum m_{ij} \widehat{D}_j$ を既約分解とすれば, $m_i | m_{ij}$ が, 任意の i, j に対して成立.

証明 M は X 上の豊富因子, $m \in m_1$ の倍数で, $mM - D_i$ が非常に豊富になるものとする. H_k ($1 \leq k \leq d = \dim X$) を, $|mM - D_i|$ の一般元とすれば, $\sum_{k=1}^d H_k + D$ は単純正規交叉因子 (ベルキニの定理により). $\mathcal{U} = \{U_s\}$ は X のアフィン開被覆, α_{st} は \mathcal{U} に関する M の変換関数とする. $\gamma_{k,s} \in H_k + D_i$ の U_s における局所方程式で, $\gamma_{k,s} = (\alpha_{st}^m \gamma_{k,t})$ ($1 \leq k \leq d$) をみ

たすものとする。 $L = \mathbb{C}(X) (\sqrt[m]{\varphi_{1,s}}, \dots, \sqrt[m]{\varphi_{d,s}})$ とおけば、
 定義から、 L は S の s 成分に $\sqrt[m]{\varphi_{i,s}}$ である。 $\beta_i: X_i \rightarrow X \in X$ の L 中
 の正規化とする。

主張 X_i は非特異, $\beta_i^{-1}(D)$ は X_i 上の単純正規交叉因子,
 $P^*D_i = m\beta_i^{-1}(D)$.

証明. $x \in U_s, X_i \in D_i$ の U_s における局所方程式とする。

case 1. $x \notin D_1$.

$x \in H_k (1 \leq k \leq e), x \notin H_k (e+1 \leq k \leq d), x \in D_2, \dots, D_f$
 $x \notin D_{f+1}, \dots, D_N$ とすれば, $\varphi_{1,s}, \dots, \varphi_{e,s}, \varphi_{2,s}, \dots, \varphi_{f,s}$ は x の正則
 $\mathbb{A}^1 \times X$ 系の一部, $\varphi_{e+1,s}, \dots, \varphi_{d,s}$ は x における単位,

case 2. $x \in D_1$

$\bigcap_{k=1}^d H_k \cap D = \emptyset$ であり, $x \notin H_1$ としてよい。 $x \notin H_1, \dots, H_e$
 $x \in H_{e+1}, \dots, H_d, x \in D_2, \dots, D_f, x \notin D_{f+1}, \dots, D_N$ とすれば,
 $\varphi_{1,s}, \varphi_{e+1,s}/\varphi_{1,s}, \varphi_{d,s}/\varphi_{1,s}, \varphi_{2,s}, \dots, \varphi_{f,s}$ は x の正則 $\mathbb{A}^1 \times X$
 系の一部, $\varphi_{2,s}/\varphi_{1,s}, \dots, \varphi_{e,s}/\varphi_{1,s}$ は x における単位。

次の補題によれば、主張は容易に従う。

補題 ([1] 参照) (R, \mathfrak{m}) は代数閉体 k 上の d 次元正則局所環で、
 $R/\mathfrak{m} = k$ とし, $(z_1, \dots, z_d) \in R$ の正則パラメータ系, $u_1, \dots, u_s \in R$ の単位とすれば、
 $R_1 = R[\sqrt[m]{z_1}, \dots, \sqrt[m]{z_d}, \sqrt[m]{u_1}, \dots, \sqrt[m]{u_s}]$
 の極大イデアル \mathfrak{m}_1 による局所化 $R_{\mathfrak{m}_1}$ は $(\sqrt[m]{z_1}, \dots, \sqrt[m]{z_d}, z_{e+1}, \dots, z_d) \in$
 正則パラメータ系にも正則局所環となる。

証明. \mathcal{M}_1 は $\sqrt[m]{z_1}, \dots, \sqrt[m]{z_r}, z_{r+1}, \dots, z_d, \sqrt[m]{u_1} - \alpha_1, \dots, \sqrt[m]{u_s} - \alpha_s$
 $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ で生成されるので, $\sqrt[m]{u_i} - \alpha_i \in (\sqrt[m]{z_1}, \dots, z_d) R_{\mathcal{M}_1}$
 $(i=1 \dots s)$ であるはず. $u_i - \alpha_i = (\sqrt[m]{u_i} - \alpha_i) \cdot v$ (v は $R_{\mathcal{M}_1}$
 の単元) とかける. $u_i - \alpha_i \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1$. したがって,
 $\sqrt[m]{u_i} - \alpha_i \in (\sqrt[m]{z_1}, \dots, z_d) R_{\mathcal{M}_1}$. Q.E.D.

同様の操作を, $(X_1, P_1^{-1}(D))$ に繰り返してくりかえす.

$P_1^{-1}(D_2)$ は既約とは限らないが, 上の議論により非特異である.
 $P_1^{-1}(D_2)$ を繰り返して, D と同様のことが出来る.

これで, 定理の文の存在がわかった. Q.E.D.

系. $f: X \rightarrow Y$ を代数的マイバースペース, Y のあるガリスキ開
 集合 Y_0 が存在し, $D = Y - Y_0$ は正規交叉因子, $f_0 = f|_{X_0} = f^{-1}(Y_0)$
 はスムーズとする. このとき, 有限全射正則写像 $P: \tilde{Y} \rightarrow Y$ が
 存在し, $\tilde{X} \in X_1 = X \times_{\tilde{Y}}$ の適当な非特異化, $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ が
 f の誘導される正則写像, $\tilde{D} = P^{-1}(D)$, $\tilde{X}_0 = \tilde{f}^{-1}(P^{-1}(Y_0))$,
 $\tilde{f}_0 = \tilde{f}|_{\tilde{X}_0}$ とおけば, \mathbb{R}^n 上の \tilde{D} のまわりの局所エノドル
 は中単, n で $n = \dim X - \dim Y$.

局所エノドルの定義から復習する.

$x \in D$, x の適当な開近傍 U をとれば, $U = \Delta^d$, $d = \dim Y$
 $(\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\})$ $U \setminus D \cong \Delta^* \times \Delta^{d-k}$.

$(\Delta^* = \Delta \setminus \{0\})$ $f^{-1}(U \setminus D) \rightarrow U \setminus D$ は C^∞ マイ
 バースペースとみなせる. (だから, $\pi_1(U \setminus D)$ は自然に
 3

$H^n(X_t, \mathbb{C})$ ($X_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in U \setminus D$) に作用する。このとき、 $\pi_1(U \setminus D)$ の元 $\gamma \in GL(H^n(X_t, \mathbb{C}))$ とみなす(左乗)の γ 、 γ における D のまわりの局所モノドロミーという。

定理 [2].

上の条件下で、局所モノドロミーは準中単。

証明は [2] の [3] 参照

上の定理によれば、 D_i の一般点における局所モノドロミー γ_i と $(m_i \in \mathbb{Z}_{>0})$ が中単となる正整数として、 (Y, D, m_i) に中単化定理をつかえば、系を与える。

文 献

[1] H. Popp: Fundamentalgruppen algebraischer Mannigfaltigkeiten. Springer Lecture Notes in Math. 176 1970

[2] A. Landman: On the Picard-Lefschetz transformations. To appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[3] W. Schmidt: Variation of Hodge Structure. *Inventiones math.* 22 (1973) 211-319