数理解析研究所講究録
第 394 巻 1980 年 82-98

Subregular singularities in a symmetric space

都立大 理　関口 次郎
都立大 理　清水 保弘

$\mathbb{C}^3$ 内の次の代数曲面は、原点のみに孤立特異点を持ち、有理二重点と呼ばれている。これらの曲面は、特異点の minimal resolution の例外ファイバーのグラフが A, D, E 型の Dynkin diagram になることから興味が持たれてきた。

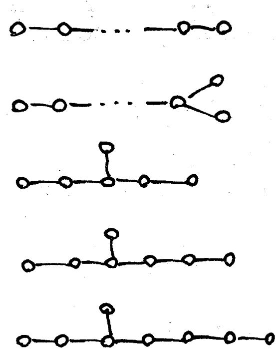
$$x^{l+1} + yz = 0 \quad \longleftrightarrow \quad A_l$$

$$x^{l-1} + xy^2 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad D_l$$

$$x^4 + y^3 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad E_6$$

$$x^3y + y^3 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad E_7$$

$$x^5 + y^3 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad E_8$$



この関係は、Lie 環との内在的関係を暗示しているが、実際、Brieskorn は、Nice Congress ('70) の報告で、有理二重点が、実際に対応する型の単純 Lie 環内に構成できることを示した。さらに、Slodowy [11] は、多重線分の現われる Dynkin 図形に対応する Lie 環 (B_l, C_l, F_4, G_2 型) で

も、Brieskorn の結果は成立することを示した。その際、現われる特異点は次の式で表わされる。

$$B_l : x^{2l}+y^2+z^2=0 \qquad (A_{2l-1} \text{ 型有理二重点})$$

$$C_l : x^{l}+xy^2+z^2=0 \qquad (D_{l+1} \quad 〃 \quad 〃 \quad 〃)$$

$$F_4 : x^4+y^3+z^2=0 \qquad (E_6 \quad 〃 \quad 〃 \quad 〃)$$

$$G_2 : x^3+y^3+z^2=0 \qquad (D_4 \quad 〃 \quad 〃 \quad 〃)$$

そして、多重線分の Dynkin 図形は、一重線分のみの Dynkin 図形を"折り畳んで"得られると解釈すれば、上の結果は理解できることを示した。

ところで、有理二重点の versal deformation を考える：

$$A_l : x^{l+1}+yz+\xi_2 x^{l-1}+\xi_3 x^{l-2}+\cdots+\xi_l x+\xi_{l+1}=0$$

$$B_l : x^{2l}+y^2+z^2+\xi_2 x^{2l-2}+\xi_4 x^{2l-4}+\cdots+\xi_{2l-2}x^2+\xi_{2l}=0$$

$$C_l : x^{l}+xy^2+z^2+\xi_2 x^{l-1}+\cdots+\xi_{2l-2}x+\xi_{2l}=0$$

$$D_l : x^{l-1}+xy^2+z^2+\xi_2 x^{l-2}+\cdots+\xi_{2l-4}x+\xi_{2l-2}+\xi'_l y=0$$

$$E_6 : x^4+y^3+z^2+\xi_2 x^2y+\xi_5 xy+\xi_6 x^2+\xi_8 y+\xi_9 x+\xi_{12}=0$$

$$E_7 : x^3y+y^3+z^2+\xi_2 x^4+\xi_6 x^3+\xi_8 xy+\xi_{10}x^2 +\xi_{12}y+\xi_{14}x+\xi_{18}=0$$

$$E_8 : x^5+y^3+z^2+\xi_2 x^3y+\xi_8 x^2y+\xi_{12}x^3 +\xi_{14}xy+\xi_{18}x^2+\xi_{20}y+\xi_{24}x+\xi_{30}=0$$

$$F_4 : x^4+y^3+z^2+\xi_2 x^2y+\xi_6 x^2+\xi_8 y+\xi_{12}=0$$

$$G_2 : x^3+y^3+z^2+\xi_2 xy+\xi_6=0$$

後に、このversal deformationのリストを単に「リスト」として引用する。

我々の出発点は、「リスト」の表示式が持っている対称性(symmetry)に注目することであった。

A_ℓ : $y \leftrightarrow z$ (変数の互換)で式は不変

D_ℓ : $z \leftrightarrow -z$ (変数の符号反転)で式は不変

E_ℓ $(\ell=6,7,8)$: $z \leftrightarrow -z$

B_ℓ : $z \leftrightarrow -z$ および $x \leftrightarrow -x$

C_ℓ : $z \leftrightarrow -z$ および $y \leftrightarrow -y$

F_4 : $z \leftrightarrow -z$ および $x \leftrightarrow -x$

G_2 : $z \leftrightarrow -z$ および $x \leftrightarrow y$.

Dynkin図形が多重線を持つ、B_ℓ, C_ℓ, F_4, G_2型の場合では"本質的に異なる" symmetry が少なくとも2種類存在することは特に注目に値する。

本稿は、Brieskorn-Slodowy理論の類似を(局所)対称空間上で展開し、これらのsymmetryをCartan involutionを用いて説明することが目的である。

§1. Brieskorn-Slodowy理論

以後、特に断わらない限り、$\mathfrak{g}$は複素単純Lie環、Gは$\mathfrak{g}$のadjoint group(内部自己同型群)、$\mathfrak{h}$は$\mathfrak{g}$の(1つ固定した)Cartan部分環、ℓは$\mathfrak{g}$の階数 $\mathrm{rank}(\mathfrak{g})$ $(=\dim\mathfrak{h})$,

W は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の Weyl 群とする。

$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ は、$\mathfrak{g}$ 上の複素数値多項式関数全体のつくる環，$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ は，G-不変式全体のつくる部分環を表わす。同様に、$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$，$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ を定義する。$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の元を．$\mathfrak{h}$ 上に制限することにより、準同型　rest : $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ を定義する。

<u>定理</u>（Chevalley，Harish-Chandra）

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \arrow[r, "\mathrm{rest}"] & \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \\ \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathrm{rest}"] & \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

は可換図式であって、

(i) $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \xrightarrow[\mathrm{rest}]{\sim} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$　（algebra isomorphism）

(ii) $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ は．$\xi_{n_1}, \cdots, \xi_{n_\ell}$（$\ell = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$）という．$\ell$ 個の代数的独立な斉次生成元を持つ（n_i は ξ_{n_i} の次数とする）。

$\xi_{n_1}|_{\mathfrak{h}}, \cdots, \xi_{n_\ell}|_{\mathfrak{h}}$ は．$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ の代数的独立な斉次生成元になる訳だが．これは幾何的には．$\mathfrak{h}/W$ が ℓ 次元アフィン空間（$\mathbb{A}^\ell$）になることを示しており、$\xi_{n_1}|_{\mathfrak{h}}, \cdots, \xi_{n_\ell}|_{\mathfrak{h}}$ はその上の座標関数と考えられる。そこで、$\mathfrak{h}/W$ の点と、座標（$\xi_{n_1}|_{\mathfrak{h}}, \cdots, \xi_{n_\ell}|_{\mathfrak{h}}$）とを同一視して次の写像を定義する。

<u>定義</u>（invariant morphism）

$$\begin{array}{cccc} \chi : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{h}/W \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & X & \longmapsto & (\xi_{n_1}(X), \cdots, \xi_{n_\ell}(X)) \end{array}$$

invariant morphism χは、$\mathfrak{g}$がA_l型単純Lie環（$\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$）のときには、ちょうど固有方程式の係数を対応させる写像になっているが、いくつか注意をしておく。まず、χは intrinsic には次のようにして定義される： $X = X_s + X_n$ を Jordan 分解とする（X_sは半単純部分，X_nは巾零部分）。$G\cdot X_s$（X_sを通るG軌道）は$\mathfrak{h}$と何点かで交わるが、その交点はWの作用で互いに移り合うので、X_sに対して、$\mathfrak{h}/W$の元$\overline{X_s}$が一意に定まる。そこで$\chi(X) = \overline{X_s} \in \mathfrak{h}/W$ が invariant morphism を表わすのである。$\xi_{n_i}(X) = \xi_{n_i}(\overline{X_s})$ と考えられるので、これを座標表示したものが、前ページに与えた定義に他ならない。

$0 \in \mathfrak{h}/W$ の逆像 $\chi^{-1}(0)$は、$\mathfrak{g}$の巾零元（nilpotent element）全体$\mathcal{N}(\mathfrak{g})$と一致している。

さて、$\mathcal{N}(\mathfrak{g})$については、次の結果が得られている。

> 定理（Kostant）
>
> $$X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \Longrightarrow \dim Z_{\mathfrak{g}}(X) = l + 2k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$
>
> ここに $Z_{\mathfrak{g}}(X) = \{ Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \}$ とする。

$\dim Z_{\mathfrak{g}}(X)$は、Xを通るG軌道$G\cdot X$の$\mathfrak{g}$内での余次元と考えられる。

さらに、注目すべき巾零元の族が2つある。それは次の結果をもとに定義される。

<u>定理</u>（Kostant, Steinberg, Dynkin）

(i) $\dim Z_{\mathfrak{g}}(X)=\ell$ なる $X\in\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ は存在し、かつ、かかる X の全体は単一の G-軌道をなす。

(ii) $\dim Z_{\mathfrak{g}}(X)=\ell+2$ なる $X\in\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ は存在し、かつ、かかる X の全体は単一の G-軌道をなす。

(i) を満たす nilpotent element を <u>regular nilpotent element</u> とよび、その全体を（単一の G-軌道）、$\mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g})$ で表わす。(ii) を満たすのを <u>subregular nilpotent element</u> とよび、その全体（単一の G-軌道）を $\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})$ で表わす。

これらの準備の後に、Brieskorn-Slodowy の結果は次のように定式化される。

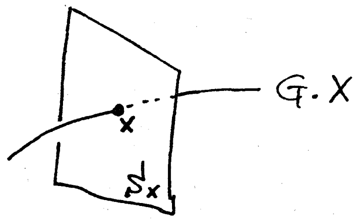
<u>定理</u>（Brieskorn-Slodowy）

$\mathfrak{g}$ を $A_\ell\sim G_2$ いずれかの型の単純 Lie 環とし、$X\in\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})$ を任意にとり、S_X を X における $G.X=\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})$ への transversal slice（後注）とする。また $\chi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}/W$ を invariant morphism とし、χ の S_X への制限を χ_{S_X} で表わす。このとき

(i) $\chi_{S_X}^{-1}(0)=S_X\cap\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ は、$\mathfrak{g}$ に対応する型の「リスト」の有理二重点（$\xi=0$ としたもの）に biholomorphic である。

(ii) $\xi=(\xi_{m_1},\cdots,\xi_{m_\ell})\in\mathfrak{h}/W$ に対し、$\chi_{S_X}^{-1}(\xi)$ は (i) に対する「リスト」の versal deformation に biholomorphic である。

（注）S_x は次のように構成される。まず、X における G-軌道 G·X への接空間 $T_x(G\cdot X)$ は $\{[X,Y] \mid Y\in\mathfrak{g}\}$ と同一視できるので、$\mathfrak{g}$ における その補空間 N_x を1つとり、アフィン部分空間 $S_x = x + N_x$ を構成する。



S_x は必要ならば、X のまわりの近傍だけに限って考察する場合もあり得る。そのときには、定理の(i)(ii)の主張は、「biholomorphic」を「locally biholomorphic」に置き換えればよい。

§2. 局所対称空間，Cartan involution

$\mathfrak{g}$ を複素単純 Lie 環，θ を $\mathfrak{g}$ の位数2の自己同型とする。$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g} \mid \theta(X)=X\}$, $\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g} \mid \theta(X)=-X\}$ とおくと、$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の部分環，$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の（部分環ではない）部分空間となり、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ は直和分解を与える。この分解を<u>複素化された Cartan 分解</u>とよび、θ を<u>複素化された Cartan involution</u>，$\mathfrak{p}$ を<u>複素化された局所対称空間</u>とよぶ。

<u>Remark</u>：通常の実単純 Lie 環の Cartan 分解については Helgason [7] を参照。ここでの状況では、$\mathfrak{k}$ が非コンパクト型実 Lie 環の複素化になっている場合も込めて考えてしまう。また、局所対称空間という用語は、まだ広くは用いられていないが、$\mathfrak{g}$ の adjoint group G の、$\mathfrak{k}$ に対応する analytic

subgroup を K とするとき、複素化された対称空間 G/K の単位元（の剰余類）における接空間と $\mathfrak{p}$ とが同一視できることから用いる。以後、煩わしいので「複素化された」という形容は省くが、誤解なきよう。大切な状況は、G の $\mathfrak{g}$ への adjoint action を K に制限することで、K は $\mathfrak{p}$ に作用することである。我々は「$K \curvearrowright \mathfrak{p}$」という状況で、Brieskorn と Slodowy の結果に相当するものを考えたい。ただし、一般の $\mathfrak{p}$ ではまだ不明で、$\mathfrak{g}$ に非常に似ている $\mathfrak{p}$ として次の概念を想定する。

<u>定義</u>　$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とするとき、$\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分環 $\mathfrak{a}$ が、$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環になっているならば、この分解（あるいは局所対称空間 $\mathfrak{p}$）を <u>normal type</u> であるという。

<u>補題1</u>　$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が normal type の Cartan 分解ならば、　$\dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{k} = \mathrm{rank}(\mathfrak{g}) = \ell$.

まず、$\mathfrak{p}$ 内の nilpotent element というものを考える必要があるが、それについては、次の結果を得る。

<u>補題2</u>　$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を normal type の Cartan 分解とする。このとき、

(i)　$\mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} \neq \phi$，　$\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} \neq \phi$

(ii)　$\forall X \in \mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ に対して

$$\dim Z_{\mathfrak{k}}(X)=0, \quad \dim Z_{\mathfrak{p}}(X)=l$$

(iii) ${}^{\forall}X \in \mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ に対して

$$\dim Z_{\mathfrak{k}}(X)=1, \quad \dim Z_{\mathfrak{p}}(X)=l+1$$

ここに、$Z_{\mathfrak{k}}(X)=\{Y \in \mathfrak{k} \mid [X,Y]=0\}$, $Z_{\mathfrak{p}}(X)=\{Y \in \mathfrak{p} \mid [X,Y]=0\}$

補題2は、§1 の Kostant の結果に相当するもので、証明は (ii), (iii) については、補題1と、Jacobson-Morozov の補題を用いてなされる。(i) については、残念ながら case by case でしか証明ができていない。

Remark：① 補題2で、normal type という仮定ははずせない。実際、normal type でない局所対称空間 $\mathfrak{p}$ であって、$\mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}=\phi$ かつ $\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}=\phi$ となる例がある。

② $\mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})$ が各々、単一 G-軌道であったのに対し、一般に $\mathcal{N}_{r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$, $\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ は（空でなければ）いくつかの K-軌道に分解する。実際、$\mathfrak{g}$ が B_l, C_l, F_4, G_2 型のいずれかで、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ が normal type の Cartan 分解のときには、$\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ は少なくとも2つの K-軌道に分かれることが、後に示される。

補題3　$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を normal type の Cartan 分解とする。$X \in \mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ について、X における $G.X$ への（$\mathfrak{g}$ 内での）transversal slice $S_X = X+\mathcal{N}_X$ が存在して、次を満たす：

(i) S_X は $(-\theta)$-stable，ここに $(-\theta)$ は，Cartan involution θ に負符号をつけたもの。

(ii) $\dim N_X \cap \mathfrak{k} = \operatorname{codim}_{S_X}(S_X \cap \mathfrak{p}) = 1$

(iii) $S_X \cap \mathfrak{p}$ は，X における $K \cdot X$ への（$\mathfrak{p}$ 内での）transversal slice を与える。

(iv) S_X 内に座標系 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell+1}, \mu)$ がとれて，

$(-\theta)|_{S_X} : (\lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell+1}, \mu) \mapsto (\lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell+1}, -\mu)$

とできる。ここに $\dim S_X = \ell + 2$。

この補題3が symmetry を説明する Key point になる。
証明は補題2を用いる。

§3. subregular singularities in $\mathfrak{p}$

この節を通じて，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は normal type の Cartan 分解とする。θ を Cartan involution とする。normal type の定義から，Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{p}$ 内にとれるので，そのようにとって1つ固定する。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ についての Weyl 群を W とする。$\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}/W$ を invariant morphism とし，χ の $\mathfrak{p}$ への制限も同一の記号で表わす：$\chi : \mathfrak{p} \to \mathfrak{h}/W$。
我々の主定理は次の3つである。

<u>定理1</u>　次のような $X \in N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ が存在する：
補題3をみたす transversal slice S_X をとるとき，$(-\theta)|_{S_X}$: $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell+1}, \mu) \mapsto (\lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell+1}, -\mu)$ は，「リスト」にある

$\mathfrak{g}$に対応する型の versal deformation の symmetry $y\leftrightarrow z$（$\mathfrak{g}$がA_ℓ型のとき），$z\leftrightarrow -z$（$\mathfrak{g}$が$B_\ell\sim G_2$型のとき）を、各 fiber $\chi_{S_X}^{-1}(\xi)$ 上でひきおこす。ここで、ξは$\mathfrak{t}/W$の元で、χ_{S_X}はχのS_Xへの制限とする。

__定理2__　$\mathfrak{g}$が B_ℓ, C_ℓ, F_4, G_2 型のいずれかとする。このとき、定理1のXとは、相異なるK-軌道に属する $Y\in\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}$ が存在して、次をみたす：定理1のように transversal slice S_Y をとるとき、$(-\theta)|_{S_Y}:(\lambda_1,\dots,\lambda_{\ell+1},\mu)\mapsto(\lambda_1,\dots,\lambda_{\ell+1},-\mu)$ は、「リスト」にある$\mathfrak{g}$に対応する型の versal deformation の symmetry $x\leftrightarrow -x$（B_ℓ, F_4 型），$y\leftrightarrow -y$（C_ℓ 型），$x\leftrightarrow y$（G_2型）を、各 fiber $\chi_{S_Y}^{-1}(\xi)$ 上でひきおこす。

これらの定理の証明には、補題3および、Slodowy [11]，Bala-Carter [4]，Elkington [6] の結果を用いる。また、$\mathfrak{p}$が$(-\theta)$の fixed point set であることから、容易に次の結果を得る（定理1,2の系として）。

__定理3__　次のような $X\in\mathcal{N}_{s.r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}$ が存在する：Xにおける（$\mathfrak{p}$内での）$K\cdot X$ への transversal slice $\tilde{S}_X$ を適当にとり、invariant morphism $\chi:\mathfrak{p}\to\mathfrak{t}/W$ の制限 $\chi|_{\tilde{S}_X}$ を $\chi_{\tilde{S}_X}$ と書くとき、$\xi\in\mathfrak{t}/W$ に対し、$\chi_{\tilde{S}_X}^{-1}(\xi)$ は、次の曲線特異点の versal deformation と biholomorphic である：（左に$\mathfrak{g}$の型を書く）

A_ℓ : $x^{\ell+1}+y^2+\xi_2x^{\ell-1}+\cdots+\xi_\ell x+\xi_{\ell+1}=0$

B_ℓ : ① $x^{2\ell} + y^2 + \xi_2 x^{2\ell-2} + \xi_4 x^{2\ell-4} + \cdots + \xi_{2\ell-2} x^2 + \xi_{2\ell} = 0$

② $y^2 + z^2 + \xi_{2\ell} = 0$

C_ℓ : ① $x^\ell + xy^2 + \xi_2 x^{\ell-1} + \cdots + \xi_{2\ell-2} x + \xi_{2\ell} = 0$

② $x^\ell + z^2 + \xi_2 x^{\ell-1} + \cdots + \xi_{2\ell-2} x + \xi_{2\ell} = 0$

D_ℓ : $x^{\ell-1} + xy^2 + \xi_2 x^{\ell-2} + \cdots + \xi_{2\ell-4} x + \xi_{2\ell-2} + \xi_\ell' y = 0$

E_6 : $x^4 + y^3 + \xi_2 x^2 y + \xi_5 xy + \xi_6 x^2 + \xi_8 y + \xi_9 x + \xi_{12} = 0$

E_7 : $x^3 y + y^3 + \xi_2 x^4 + \xi_6 x^3 + \xi_8 xy + \xi_{10} x^2 + \xi_{12} y + \xi_{14} x + \xi_{18} = 0$

E_8 : $x^5 + y^3 + \xi_2 x^3 y + \xi_8 x^2 y + \xi_{12} x^3 + \xi_{14} xy + \xi_{18} x^2 + \xi_{20} y + \xi_{24} x + \xi_{30} = 0$

F_4 : ① $x^4 + y^3 + \xi_2 x^2 y + \xi_6 x^2 + \xi_8 y + \xi_{12} = 0$

② $y^3 + z^2 + \xi_8 y + \xi_{12} = 0$

G_2 : ① $x^3 + y^3 + \xi_2 xy + \xi_6 = 0$

② $x^3 + z^2 + \xi_2 x^2 + \xi_6 = 0$

注目すべきは、normal type の局所対称空間$\mathfrak{p}$（Kの作用の下で）での Brieskorn - Slodowy 理論に類似のものを考えると、曲線の特異点とそのversal deformation が得られるということである。さらに、$\mathfrak{g}$が B_ℓ, C_ℓ, F_4, G_2 型のときには、subregular nilpotent element のとり方により少なくとも２つの曲線特異点が生ずることである。実際、これら２つ（①，② で表示）の Milnor 数は異なるので、biholomorphic な変数変換では互いに移れなくて、このことから、少なくとも２つの subregular nilpotent K-orbit が$\mathfrak{p}$内に存

在することが結論されるのである。

§4. 予想と展望

定理3は、Lie環での Brieskorn-Slodowy の定理に比べると若干弱い形であるが、その原因は、$\mathfrak{p}$ における nilpotent K-軌道の構造論が、1980年7月現在不備なことによる。次のことは、多分正しいと予想され、これらが確認されれば、定理3は、もっと強い形にできるはずである。

> 予想 $\mathfrak{g}$ を複素単純 Lie 環, G を $\mathfrak{g}$ の adjoint group,
> $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を normal type の Cartan 分解, K を $\mathfrak{k}$ に対応する G の analytic subgroup とする。このとき、
>
> (i) 任意の $X \in N(\mathfrak{g})$ について、$G \cdot X \cap \mathfrak{p} \neq \phi$
>
> (ii) $\mathfrak{g}$ が A_l, D_l, E_l 型のときには、(i) の $G \cdot X \cap \mathfrak{p}$ は単一の K-軌道からなる。
>
> (iii) $\mathfrak{g}$ が、B_l, C_l, D_l, G_2 型のときには、
>
> ① $N_{r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ は単一の K-軌道からなる。
>
> ② $N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ は、2個の K-軌道からなる。

Remark：予想(i)は、$\mathfrak{g}$ が A_l 型のときには、正しい。

さて、versal deformation（「リスト」）の symmetry という概念は、現段階では熟したものとは言いがたいが、もしも、うまく定式化できて、かつ“同値”の概念がうまく定義できれば、symmetry の“同値類”と、$N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ 内の K-

軌道は、1対1, onto に対応すると考えられる。予想が正しければ、定理1,2の symmetry 以外には、symmetry の"同値類"は存在しないと考えられる。

また、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ が、normal type でない Cartan 分解の場合には、"$\mathfrak{p}$内の subregular nilpotent element" をいかに定義するかは考慮の余地があるが(一般に $N_{s.r.}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{p}=\phi$)、「nilpotent K-軌道の中で、二番目に generic なもの」ととらえれば、次の例がある。$\mathfrak{p}$が、複素化された対称空間 $SO(n+1,\mathbb{C})/SO(n,\mathbb{C})\oplus SO(1,\mathbb{C})$ 【Cartan のリストでは BDI型 rank 1 の場合 cf. Helgason [7]】に対応するとき、"subregular singularity" としては、$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0$ という $(n-1)$ 次元超曲面を得る。その他にも、もう1つ、多変数の特異点の例が知られている。このように、局所対称空間での Brieskorn-Slodowy 理論では、特異点を有理二重点(これは2次元)として把えることは多分不適で(normal type のときには、すでに1次元になった!)、代わりに、V. I. Arnol'd が提起した単純特異点(これは多変数でも同様に定義できる。cf. [1])という形で把えるべきではないかと思われる。これについて言えば、B_l, C_l, F_4 (G_2)型での現象は、Arnol'd の最近の論文[2], [3]と関連しているように思える。

参考文献

[1] V. I. Arnol'd : Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities (Functional Analysis and its Application, Vol. 6, 1972, pp. 254-272)

[2] V. I. Arnol'd : Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k, C_k and F_4 and singularities of evolutes (Russian Mathematical Surveys, Vol. 33, 1978, pp. 99-116 (No. 5))

[3] V. I. Arnol'd : Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singular projections of smooth surfaces. (Russian Math. Surveys, Vol. 34, 1979, pp. 1-42 (No. 2))

[4] P. Bala and R. W. Carter : Classes of unipotent elements in simple algebraic groups I, II (Math. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 79, 1976, pp. 401-425 ; Vol. 80, 1976, pp. 1-18).

[5] E. Brieskorn : Singular elements of semi-

simple algebraic groups (Actes, Congrès intern. Math. 1970. Tome 2, pp. 279-284).

[6] G. B. Elkington : The centralizers of unipotent elements in semisimple algebraic groups (Journal of Algebra Vol. 23, 1972, pp. 137-163)

[7] S. Helgason : Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. (Academic Press)

[8] B. Kostant : The principal three-dimensional subgroups and the Betti numbers of a complex simple Lie group (Amer. J. Math. Vol. 81, 1959, pp. 973-1032).

[9] B. Kostant : Lie group representations on polynomial rings (Amer. J. Math. Vol. 85, 1963, pp. 327-404)

[10] B. Kostant and S. Rallis : Orbits and representations associated with symmetric spaces (Amer. J. Math., Vol. 93, 1971, pp. 753-809)

[11] P. Slodowy : Einfache Singularitäten und einfache algebraishe Gruppen (Regensburger Math. Schriften 2, 1978)

[12] R. Steinberg : Conjugacy classes in Algebraic Groups (Lecture Note in Math. No. 366 , Springer-Verlag)

[13] E. B. Dynkin : Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras (Amer. Math. Soc. Trans. (2) , Vol. 6 , 1957 , pp. 111 - 244)

以上。

1980年7月。