数理解析研究所講究録
第395巻 1980年 6-17

代数的方法による命題論理の研究

静岡大 理学部　　古森 雄一

命題論理の研究はある種の代数系の研究と密接に結びついている。古典論理はブール代数と、直観主義論理は擬ブール代数と、Łukasiewiczの多値論理はChang[1][2]によって定義されたMV代数とそれぞれ関係している。代数系に興味をもっている研究者は、論理の方から発生した代数の問題を考え、論理の方に関心のある研究者は、論理研究の手段として代数系の構造を調べる、というように、問題意識に違いがあるにしても、内容的には同じことを研究していることがよくある。本稿では、論理研究の手段として代数的手法を用いた最近の結果を紹介する。

ところで、数学的な論理研究の立場にも色々あるが、大きく分けると、次の2つがある。オ1のものは"正しさ（モデル）"の概念が基本にあって、その公理化の問題や種々の論理演算間の関係を調べるものである。一つの論理演

算ですべての可能な論理演算を表わす、Scheffer Stroke の一般化の話や、他の論理演算子を使ってなるべく能率よくある論理演算子を表わす論理設計の話等は、この才1の立場上にある。才2のものは、証明可能性（形式的体系）の概念が基本にあり、その後に、"正しさ"をどのように考えると、正しい論理式と証明可能な論理式が同じものになるかを調べる（すなわち、モデルをみつける）ことや、種々の体系間の関係を問題にするものである。

直観主義論理が Heyting (1930) により形式化されたときには、そのモデルはなかった（直観主義者の頭の中にはあったかもしれないが？）ので、まず擬ブール代数によるモデルが考えられ、その後 Kripke (1965) により全く別のモデルが考えられた。この歴史の流れは、才2の立場上にあるといってよい。この才2の立場を更に極端化し、論理の定義を代入と modus ponens（この2つは、ほとんどすべての形式化された論理体系で認められている推論規則である。）に関して閉じたものと考え、研究が進められてきた分野が 1960 年以降さかんに研究されはじめた中間命題論理である。

一方、Łukasiewicz 論理の方は、まず 1920 年に Łukasiewicz により3値論理（つまり3値モデル）が提出されたのです。この論理には、Wajsberg が 1931 年に公理化を与えている。

8

また、1930年にはŁukasiewiczはTarskiと共同で、3値論理を一般化し、m（mは自然数か$\aleph_0$）値論理を考えた。　その時、Łukasiewiczは1つの公理系を提出し、それが$\aleph_0$値論理の公理化になっていることを予想した。　mが自然数の（すなわち$\aleph_0$でない）ときのm値論理の公理化はRosserとTurquetteにより、1945年に行なわれている[12]。　前述のŁukasiewiczの予想は1958年にRoseとRosserにより、正しいことが証明された[11]。　また、その後、m値論理のScheffer Strokeの問題や論理設計的な問題も研究されてきた。　このように、Łukasiewicz流の論理は、主として、第1番目の立場に基づいて研究されてきた。

そこで、私は今までとは立場を変えてみて、論文[4][5][6][7]でŁukasiewicz流の論理の研究を第2の立場に立って、行なってみました。　その結果、Łukasiewiczの提出した5つの公理を含む論理のモデルによる完全な特徴づけが得られました。

本稿では、まずMaksimovaによる代数的手法による中間命題論理の最近の結果を簡単に紹介し、次に、超Łukasiewicz命題論理についての私の結果を述べるつもりでいます。

最後に、数学的な論理研究の立場としては、前に述べた2つの立場とは、全く異なった意味での立場の違いがあるこ

とを注意しておきます。 一方は、数学の基礎としての論理の研究ということを強く意識し、定理の証明には、ある種の立場(例えば、有限の立場)で認められる論法しか認めないものです。 もう一方は、研究対象となっている形式的体系の性質を知るためには、数学で普通に使われている方法はもちろんのこと、すでに得られている数学の成果も使用してよいとするものです。 これから紹介する2つの話は、後者の立っているものです。 また、本稿では、命題論理しか扱わないので、以後超直観主義命題論理と超Łukasiewicz命題論理をそれぞれ単に、超直観主義論理、超Łukasiewicz 論理ということにします。

§1. 超直観主義論理

(命題)論理式とは、4つの論理記号 ⊃(ならば), ∨(または), ∧(かつ), ¬(でない)と命題変数 p, q, r, … を使ってふつうに作られたものです。 命題変数は可算個だけ用意されているものと考えますので、論理式全体の集合 W の濃度は高々(というよりちょうど)可算個です。 直観主義論理(又は古典論理)で証明可能な論理式全体の集合を LJ(又は LK)と書きます。 超直観主義論理を次の

ように定義します。

<u>定義 1.1.</u> 論理式の集合 L が次の3つの条件を満たすとき、L を超直観主義論理という:

(1) 代入に関して閉じている。すなわち、$A \in L$ で A' を A のある命題変数を現れるすべてのところで、ある1つの論理式で置きかえて得られるものとすると、$A' \in L$。

(2) modus ponens に関して閉じている。 すなわち、$A \supset B \in L$ かつ $A \in L$ ならば $B \in L$。

(3) $LJ \subseteq L$。■

この定義の(3)を $LJ \subseteq L \subseteq LK$ と変えると、中間論理(intermediate logic)の定義となります。 その場合、論理式全体の集合 W が除かれるだけです。 日本では、中間論理という言葉が古くから使われ、ソ連の方では、超直観主義論理(superintuitionistic logic)という言葉が多く使われているようです。 中間論理の日本における初期の研究のようすや問題意識等に興味のある方は、細井氏による解説 [3] がありますので参考にして下さい。

Maksimova の結果について述べるためには、Craig's interpolation theorem (CIT) について説明しなければなりません。 CIT は最初 Craig により1957年に古典論理で

成り立っていることが示されたものです。

定義1.2. CIT が論理 L で成り立っているとは、任意の論理式 A, B に対して、$A \supset B \in L$ ならば次のような論理式 C が存在することである： $A \supset C \in L$ かつ $C \supset B \in L$ かつ C の中には A と B に共通に現れる命題変数しか現れない。■

定理1.3 (Maksimova [10]). CITが成り立つ超直観主義論理は LJ, LQ, LP_2, J_2, S_2, Sw, LK, W の8つだけである。
ここで、

$$LQ = LJ + \neg p \vee \neg\neg p,$$

$$LP_2 = LJ + p \vee (p \supset (q \vee \neg q)),$$

$$J_2 = LP_2 + (p \supset q) \vee (q \supset p) \vee ((p \supset \neg q) \wedge (\neg q \supset p)),$$

$$S_2 = LP_2 + \neg p \vee \neg\neg p,$$

$$Sw = (p \supset q) \vee (q \supset p)$$

である。■

$LQ = LJ + \neg p \vee \neg\neg p$ の意味は、LQ は LJ に $\neg p \vee \neg\neg p$ を公理としてつけ加えた論理であることを表わしている。すなわち、LQ は LJ に $\neg p \vee \neg\neg p$ をつけ加えて、代入と modus ponens に関して閉じた論理式の集合であります。

Jankov [9] は1968年に超直観主義論理全体の集合 $\mathcal{L}$ の濃度が連続濃度であることを示しています。ですから、連続濃度ある論理のうちで8つしかCITが成り立つものが

ないということです。 この問題に関しては、私が1976年11月頃に、スライス(この言葉の定義は[3]にある) $\mathcal{S}_n$ ($3 \leq n < \omega$)に属する論理ではCIT が成り立たない、という結果を得ている。 この結果の発表はやや遅れて[8]でしています。 LJ, LQ, S_ω は $\mathcal{S}_\omega$ に、LP_2, J_2, S_2 は $\mathcal{S}_2$ に、LK は $\mathcal{S}_1$ に、W は $\mathcal{S}_0$ にそれぞれ属しています。

Maksimova の定理1.3の証明は次のようであります。超直観主義論理全体の集合と擬ブール代数のバラエティー(variety)全体の集合との間に自然な1対1対応があることが知られています。 そこでまず、論理LでCIT が成り立つことと、それに対応するバラエティー M_L が amalgamable であることが同値であることを示します。 次に、amalgamable なバラエティーは先程の8つの論理に対応するバラエティーしかないことを示すのです。 このように全く代数的な方法による証明です。

§2. 超 Łukasiewicz 論理

この節では、論理式とは、2つの論理記号 ⊃(ならば), ¬(でない)と命題変数 p, q, r, --- を使ってふつうに作られたものとします。 前節との違いは、論理記号として

∨，∧の２つがないことです。∨と∧は⊃と¬を使って定義されるのです。

<u>定義2.1.</u>　論理式の集合Lが次の３つの条件を満たすとき、Lを超Łukasiewicz論理という：

(1) 代入に関して閉じている，

(2) modus ponens に関して閉じている，

(3) 次の５つの公理を含む

1. $p \supset (q \supset p)$，
2. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$，
3. $(p \supset q) \supset (q \supset ((q \supset p) \supset p))$，
4. $(p \supset q) \supset ((q \supset p) \supset (q \supset p))$，
5. $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$　。■

この５つの公理はŁukasiewiczが∞値論理の公理化であろうと予想し提出したものです。このように定義すると、Łukasiewiczの∞値論理はもちろんのこと、mのすべての値に対して、Łukasiewiczのm値論理は超Łukasiewicz論理となります。そこで次のような問題が考えられます。

超Łukasiewicz論理はŁukasiewiczのn値論理以外にどんなものがあるのだろうか？

論理記号として¬を含まない場合は超Łukasiewicz論理は

Łukasiewicz の m 値論理しかない、というのが [5] の結論であります。 論理記号 ¬ を含む場合の結論を述べるためには、モデル S_n と S_n^ω の定義を必要とします。

定義 2.2. 集合 $S_n = \{0, 1/n, \cdots, n-1/n, 1\}$ に対して、演算 ⊃, ¬ をつぎのように定義する：

$$x \supset y = \min(1, 1-x+y), \quad \neg x = 1-x 。$$

また、閉区間 [0, 1] に含まれる有理数全体の集合 S_ω に、同様に演算 ⊃, ¬ を定義する。■

定義 2.3. 集合 $S_n^\omega = \{(x,y) \mid x \in S_n, y \in \mathbb{Z}\} - \{(0,-y) \mid y \in \{0,1,2,\cdots\}\} - \{(1,y) \mid y \in \{0,1,2,\cdots\}\}$ に対して、演算 ⊃, ¬ をつぎのように定義する：

$$(x,y) \supset (z,u) = \begin{cases} (1,0) & \text{if } z > x, \\ (1, \min(0, u-y)) & \text{if } z = x, \\ (1-x+z, u-y) & \text{その他}, \end{cases}$$

$$\neg(x,y) = (1-x, -y) 。■$$

以上のモデルでは 1 や (1, 0) を真と考えています。 これらのモデルで恒真となる論理式全体の集合をモデルを表わす S_n, S_n^ω を流用して表わすことにします。 すなわち、S_n はモデルを表わすとともに、命題変数のそれぞれに S_n のどの

元を割り当てて計算してもその結果が 1 となる論理式全体の集合を表わします。 また、S_n は Łukasiewicz の $(n+1)$ 値論理となっています。

このとき、次の定理が得られます。

定理 2.4（古森 [7]）. 任意の超 Łukasiewicz 論理 L に対して、自然数の集合 I, J が存在して、

$$L = \bigcap_{i \in I} S_i \cap \bigcap_{j \in J} S_j^{\omega}$$

と表わすことができる。 しかも L が最小の超 Łukasiewicz 論理 $Łu$ でなければ、I も J も有限集合となる。■

もちろん、最小の超 Łukasiewicz 論理とは前述の５つの公理による公理化される論理であり、$Łu = \bigcap_{i \in N} S_i$ となっています。 この定理の証明の概観を簡単に説明することはむずかしい。 まず、ある順序可換群の形式的理論の完全性（その理論からは、任意の命題の肯定か否定のどちらかが必ず証明できること）を証明する [6]。次にそれを使って、任意の irreducible なモデルは定義 2.2, 2.3 で定義されたモデルのどれかと、モデルとしては同じ（恒真な論理式全体の集合が同じ）であることを示すのです。 やはり代数的手法をさかんに用います。

定理 2.4 を使うと、様々な結果が得られます。 例えば

、超Łukasiewicz 論理全体の集合の濃度は可算であることなどはすぐに分ります。 また、前節のCITに関しては、CITの成り立つ超Łukasiewicz 論理は論理式全体の集合WとS_1（実はLK）しかないことも分ります。

参考文献

[1] C. C. Chang, Algebraic analysis of many valued logics, Trans. Amer. Math. Soc., **88** (1958), 467–490.

[2] C. C. Chang, A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms, Trans. Amer. Math. Soc., **93** (1959), 74–80.

[3] 細井 勉, 中間命題論理ことはじめ, 月刊マセマティクス（海洋出版）, **2** (1980), 169–175.

[4] Y. Komori, The separation theorem of the $\aleph_0$-valued Łukasiewicz propositional logic, Rep. Fac. Sci., Shizuoka Univ., **12** (1978), 1–5.

[5] Y. Komori, Super-Łukasiewicz implicational logics, Nagoya Math. J., **72** (1978), 127–133.

[6] Y. Komori, Completeness of two theories on ordered abelian groups and embedding relations, Nagoya Math. J.,

77 (1980), 33–39.

[7] Y. Komori, Super-Łukasiewicz propositional logics, Nagoya Math. J., (to appear).

[8] Y. Komori, Logics without Craig's interpolation property, Proc. Japan Acad., Ser. A, **54** (1978), 46–48.

[9] V. A. Jankov, Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi, Soviet Math. Dokl., **9** (1968), 806–807.

[10] L. L. Maksimova, Craig's theorem in superintuitionistic logics and amalgamable varieties of pseudo-Boolean algebras, Algebra i Logica, **16** (1977), 643–681.

[11] A. Rose and J. B. Rosser, Fragments of many-valued statement calculi, Trans. Amer. Math. Soc., **87** (1958), 1–53.

[12] J. B. Rosser and A. R. Turquette, Axiom schemes for m-valued propositional calculi, J. S. L., **10** (1945), 61–82.