数理解析研究所講究録
第395巻 1980年 29-33

Coseparable coalgebra について

岡山大 理　中島 惇

kを体、Cをk-coalgebraとする。ここではcoseparable C-coalgebraのcoderivationによる特徴づけと、それについてのcoextensionについて述べる。以下で用いられる用語や記号等は[3]，[4]を，また詳細な証明については[3]を参照されたい。

A，Cをk-coalgebras，$\phi: A \longrightarrow C$を$k$-coalgebra mapとする。$M$を$A$-comoduleとすれば、$M$は$\phi$によって自然に$C$-comoduleとなる。はじめに[1]において定義されたk-coderivationの概念を少し一般的な形に述べておく。

定義1 (cf. [1, §3]). MをA-A-bicomodule（従ってϕによって自然にC-C-bicomoduleとなる）とする。C-comodule map $f: M \to A$がC-coderivationとは

$$\Delta_A f = (1 \square f)\rho^{+} + (f \square 1)\rho^{-} : M \longrightarrow A \square_C A$$

が成り立つときをいう。ここで ρ^+ 及び ρ^- はそれぞれ M の右及び左 A-comodule の structure map である。C-coderivation f が inner C-coderivation であるとは次の条件をみたす C-comodule map $\gamma: M \to C$ が存在するときをいう。

$$f = (1 \square \gamma)\rho^- - (\gamma \square 1)\rho^+.$$

定義2. C-coderivation $\tau: M \to A$ が k-coderivation $\delta: M \to C$ の coextension であるとは $\phi\tau = \delta$ となるときをいう。

以下 A を coalgebra, M を A-A-bicomodule とする。さらに C は cocommutative coalgebra であって、$\phi: A \to C$ なる coalgebra map があると仮定する(このような ϕ があるとき A を C-coalgebra と呼ぶことにする)。

A-A-bicomodule の exact sequence を考えよう。

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\Delta_A} A \square_C A \xrightarrow{\omega} (A \square_C A)/\Delta_A(A) \longrightarrow 0$$

ここで ω は自然な写像であり、$(A \square_C A)/\Delta_A(A)$ の A-A-bicomodule structure は $A \square_C A$ から自然に定義されるものとする。$L = (A \square_C A)/\Delta_A(A)$, $a \circ b = \omega(a \square b)$ とおく。次の補題は容易に証明できる。

補題 1 (cf. [1, §3]). k-linear map $\lambda: L \longrightarrow A$ を

$$\lambda(a \circ b) = a\,\varepsilon_c\,\phi(b) - \varepsilon_c\,\phi(a)\,b$$

と定義すれば、λ は C-coderivation である。

定理 1 (cf. [1, 定理 3]). C-coalgebra A について次は同値である。

(1) A は coseparable C-coalgebra である (i.e., A-A-bicomodule の exact sequence (*) が split する)。

(2) 任意の A-A-bicomodule M に対して、すべての C-coderivation $f: M \rightarrow A$ は inner である。

証明. (1)$\Rightarrow$(2). 仮定から $\tau\Delta_A = 1$ となる A-A-bicomodule map $\tau: A \square_C A \longrightarrow A$ がある。任意の C-coderivation $f: M \rightarrow A$ に対して、$h = \phi\tau(1 \square f)\rho^-: M \rightarrow C$ とおけば、$f = (1 \square h)\rho^- - (h \square 1)\rho^+$ となる。

(2)$\Rightarrow$(1). 仮定から C-comodule map $\gamma: L \rightarrow C$ で、$\lambda = (1 \square \gamma)\rho_L^- - (\gamma \square 1)\rho_L^+$ (ここで ρ_L^+, ρ_L^- はそれぞれ L の右及び左 A-comodule structure map) なる γ が存在する。そこで $\xi = (1 \square \varepsilon_A \square 1)(1 \square \gamma \square 1)(\rho_L^- \square 1)\rho_L^+$ とおけば、ξ は A-A-bicomodule map であり $\omega\xi = 1$ となる。 証終.

次に coderivation の coextension について述べる。$B = A$

$\oplus M$（k-vector space として）とおく。$\Delta_B : B \longrightarrow B \otimes_k B$，$\varepsilon_B$：$B \longrightarrow k$ を次のように定義すれば、$(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ は coalgebra となる（[2, §4]）．

$$\Delta_B = \begin{pmatrix} \Delta_A & 0 \\ 0 & \rho^- \\ 0 & \rho^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_B = \begin{pmatrix} \varepsilon_A \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\delta : M \longrightarrow C$ を k-coderivation とし，$\rho_B : B \longrightarrow C \otimes_k B$ を

$$\rho_B = \begin{pmatrix} (\phi \otimes 1)\Delta_A & (\delta \otimes 1)\rho^+ \\ 0 & (\phi \otimes 1)\rho^- \end{pmatrix}$$

と定義すれば、(B, ρ_B) は C-comodule となる．このとき次の定理を得る．

定理 2．$\delta : M \longrightarrow C$ を k-coderivation とする。A が injective C-comodule であり、[2, §4] の意味で $H^2(N, A) = 0$（N は任意の A-A-bicomodule）が成りたつと仮定すれば，δ の coextension であるような C-coderivation $\hat{\delta} : M \longrightarrow A$ が存在する。

証明。B を上で定義した coalgebra とする。$B \longrightarrow A$ なる projection を通して B は C-coalgebra になる．

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

（ここで i，p はそれぞれ自然な injection 及び projection である。）のような C-comodule の exact sequence を考えれば，A が C-

injectiveであることよりsplitする。従って[2, 定理4.10]よりC-coalgebra map $\widehat{\delta}: B \to A$で$\widehat{\delta} i = 1$となるものが存在する。この$\widehat{\delta}$がC-coderivationであり，$\phi\widehat{\delta} = \delta$となるものである。

注意。Aがcoseparable C-coalgebraならば$H^2(N, A) = 0$である。

References

[1] Y. Doi: Homological coalgebra, to appear.

[2] D. W. Jonah: Cohomology of coalgebras, Mem. Amer. Math. Soc. 82 (1968).

[3] A. Nakajima: Cosemisimple coalgebras and coseparable coalgebras over coalgebras, Math. J. Okayama Univ. 21 (1979), 125-140.

[4] M. E. Sweedler: Hopf algebras, Benjamin, New York, 1969.