数理解析研究所講究録
第398巻 1980年 60-70

Ergodic properties of dynamical semi-groups on operator algebras

新潟大・理・渡辺 誠治

§1. 序

作用素環上の正（完全正）写像は興味深い重要なトピックである。特に非可換作用素環の研究においては完全正写像が重要で有効な役割りを果すことが知られている。

一方近年，作用素環上のdynamical semi-group（これは完全正写像のある種の半群として定義される）の理論が注目されている。これは開放系の統計力学を扱うための自然な数学的枠組のひとつとして，物理学者により取り上げられて研究がはじめられた（[2, 5]）。そのために物理的に意味のある強い条件のもとで研究されていることが多く，数学（又は作用素環論）的観点からみた場合には，まだまだ不十分な点が多く，未完成なものである。我々はこのような作用素環上の半群を一般的，数学的観点から調べたい。

§2. 準備

Mをヒルベルト空間H上のvon Neumann代数とする。

<u>定義 2.1.</u> M上の正規正線型写像のσ-弱連続一径数半群 $\alpha=\{\alpha_t\}_{t\geqq 0}$で$\alpha_0=I$($M$上の恒等写像)かつすべての$\alpha_t$が$M$のidentity 1を保存するものを考える。これをM上の(quantum) dynamical semi-groupという。

各α_tが正規だから、半群の一般論により上のσ-弱連続性は条件“$\lim_{t\downarrow 0}\|\rho\circ\alpha_t-\rho\|=0 \quad \forall\rho\in M_*$($M$のpredual)”と同値である。

<u>定義 2.2.</u> αをM上のdynamical semi-group, ξをMに対するcyclicかつseparating norm one vectorとする。ω_ξ(ξにより定義されるB(H)上のvector state)がα-不変のとき三つ組(M, α, ξ)をdynamical system (d.s.と略す)という。又d.s.(M,α,ξ)において、すべてのα_tが2-positiveのとき(M,α,ξ)を2-positive d.s. (2-P.d.s.と略す)という。Completely positive d.s. (C.P.d.s.)についても同様に定義する。

2-P.d.s.(M,α,ξ)に対して、$T_tA\xi=\alpha_t(A)\xi$ ($A\in M$)によりH上の強連続縮小半群$T=\{T_t\}_{t\geqq 0}$が定義される。このTを(M,α,ξ)にassociateする(縮小)半群という。これは確率空間$(X,\mathcal{B},\mu)$上のflowとそれによって定義される$L^2(X,\mathcal{B},\mu)$上の作用素の半群

との関係の非可換版と考えられる。

次に(M,α,ξ), (N,β,η)を2つのC.P.d.s., $T=\{T_t\}_{t\geqq 0}$, $S=\{S_t\}_{t\geqq 0}$をこれらにassociateする半群とする。このとき，$(\alpha\otimes\beta)_t=\alpha_t\otimes\beta_t \quad (t\geqq 0)$により，MとNのvon Neumannテンソル積$M\otimes N$上のdynamical semi-group $\alpha\otimes\beta$が定義できる。明らかにvector state $\omega_{\xi\otimes\eta}$は$\alpha\otimes\beta$-不変である。$(M\otimes N, \alpha\otimes\beta, \xi\otimes\eta)$を$(M,\alpha,\xi)$と$(N,\beta,\eta)$のproduct d.s.と云う。さらに$T\otimes S=\{T_t\otimes S_t\}_{t\geqq 0}$は$(M\otimes N, \alpha\otimes\beta, \xi\otimes\eta)$にassociateする半群になる。

次に[1]で導入されたdual dynamical systemについて考える。これはある場合には，αが一般に群でないことに起因する困難を除く働きをする。

<u>補題2.3.</u> ([1]) Φをvon Neumann algebra M上のunitalな正線型写像，ξをMに対するcyclicかつseparating vectorで$\omega_\xi\circ\Phi=\omega_\xi$とする。このとき$M'$（Mの可換子環）上のunitalな正線型写像$\Phi'$で$\omega_\xi(\Phi(A)A')=\omega_\xi(A\Phi'(A'))$ $(A\in M, A'\in M')$となるものが一意に存在する。さらにこのときΦが2-P.又はC.P.ならΦ'もそれぞれ2-P., C.P.になる。

この補題から任意のd.s.(M,α,ξ)に対して$\omega_\xi(\alpha_t(A)A')=$

$\omega_\xi(A\alpha_t'(A'))$ $(A\in M,\ A'\in M')$ をみたすような d.s. (M',α',ξ) が一意に存在することがわかる。この d.s. (M',α',ξ) を (M,α,ξ) の dual d.s. という。

最後に補題 2.3 の応用として d.s. の spaciality について考える。(M,α,ξ) を 2-P.d.s.，$T=\{T_t\}_{t\geqq 0}$ をそれに associate する半群とする。このとき α_t と spacial map $T_t\cdot T_t^*$ の関係について次の定理を得る。

定理 2.4. (M,α,ξ) を 2-P.d.s. とする。このとき各 $t>0$ に対して map : $A\longrightarrow \alpha_t(A)-T_tAT_t^*$ は M から $B(H)$ への正写像である。さらに (M,α,ξ) が C.P. なら上の map は又 C.P. である。

また補題 2.3 を用いると [3, Theorem 1.1] の改良及び簡単な証明が得られる。

§.3. 固有値

(M,α,ξ) を 2-P.d.s.，$T=\{T_t\}_{t\geqq 0}$ をそれに associate する半群とする。$\mathbb{C}^+\equiv\{z\in\mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}\, z\geqq 0\}$ とし，$\mathbb{C}^+\ni z$ に対して，$H_z\equiv\{\xi\in H\ ;\ T_t\xi=e^{izt}\xi\quad \forall t\geqq 0\}$ とおくと，H_z は H の閉部分空間である。$H_z\neq(0)$ のとき z，H_z，$\xi\in H_z$ をそれぞれ T の固有値，固有空間，固有ベクトルという。E_z を H_z への直交射影，$E(T)$ を T の実固有値の全体とする。次に $\mathbb{C}^+\ni z$ に対して，$M_z=\{A\in M;$

$\alpha_t(A)=e^{i\lambda t}A \quad \forall t\geq 0\}$ は σ-弱閉部分空間となる。$M_\lambda \neq (0)$ のとき λ, M_λ, $A\in M_\lambda$ をそれぞれ α の固有値，固有空間，固有作用素と云う。α の実固有値の全体を $E(\alpha)$ であらわす。$E(\alpha)$ は $\mathbb{R}$ の symmetric subset である。又 M_0 を M^α ともかく。

注意：$i\delta$, iL をそれぞれ α, T の生成作用素とするとき，上で定義した固有値は（一般に非有界）作用素 δ, L の固有値に他ならない。しかし以下の議論にとっては我々の定義のほうが都合がよい。

[7]において M から M_0 への正規忠実なノルム1の射影が存在することが示されているが，さらにくわしく次の定理が得られる。

定理3.1. (M,α,ξ) を 2-p.d.s. とするとき，次の(1)～(3)が成立する。

(1) 任意の実数 λ と $A\in M$ に対して，$\frac{1}{t}\int_0^t e^{-i\lambda s}\alpha_s(A)ds$ は $t\to+\infty$ のとき強極限（$\mathcal{E}_\lambda(A)$ とおく）が存在する。

(2) $E(\alpha)\ni\lambda$ に対して，$\mathcal{E}_\lambda$ は M から M_λ への σ-弱連続ノルム1射影となる。

(3) $\{\mathcal{E}_\lambda\}$ は次の性質をみたす。

(a) $\mathcal{E}_\lambda(A)\xi = E_\lambda A\xi \quad (A\in M)$,

(b) $\mathcal{E}_\lambda\circ\alpha_t=\alpha_t\circ\mathcal{E}_\lambda = e^{i\lambda t}\mathcal{E}_\lambda \quad (t\geq 0)$,

(c) $\omega_\xi\circ\mathcal{E}_\lambda = 0 \quad (\lambda\neq 0)$,

(d) $\mathcal{E}_\lambda\circ\mathcal{E}_\mu = 0 \quad (\lambda\neq\mu)$,

(e) $\mathcal{E}_\lambda(A_1BA_2)=A_1\mathcal{E}_{\lambda-\mu-\nu}(B)A_2 \quad (B\in M,\ A_1\in M_\mu$

$A_2 \in M_\nu$),

(f) $\mathcal{E}_\lambda(A)^* = \mathcal{E}_\lambda(A^*) \qquad (A \in M)$

ここでλ, μ, νは実数とする。

この定理から，$\lambda, \mu \in E(\alpha)$に対して$M_\lambda M_\mu \subset M_{\lambda+\mu}$であることがわかる。次に$\widetilde{M}$を$\{M_\lambda ; \lambda \in E(\alpha)\}$の*linear span*の$\sigma$-弱閉包（これはvon Neumann代数になる），$\widetilde{H}$を$\{H_\lambda ; \lambda \in E(T)\}$の生成する閉部分空間とする。又$H \supset K$に対して，$K$の生成する閉部分空間を$[K]$であらわす。このとき$\alpha$と$T$の関係について次を得る。

<u>命題3.2.</u> $E(\alpha) = E(T)$，さらに$[M_\lambda \xi] = H_\lambda$，$[\widetilde{M}\xi] = \widetilde{H}$，$M_\lambda H_\mu \subset H_{\lambda+\mu} \quad (\lambda, \mu \in E(\alpha))$.

次に$T' = \{T'_t\}_{t \geqq 0}$をdual d.s. (M', α', ξ)に*associate*する半群とすると，$T'_t = T^*_t \ (t \geqq 0)$である。従って次を得る。

<u>命題3.3.</u> $E(\alpha) = E(\alpha')$.

§.4. 積の固有空間

(M, α, ξ), (N, β, η)を2つのC.P.d.s.，及びこれらに*associate*する半群をそれぞれ$T = \{T_t\}_{t \geqq 0}$，$S = \{S_t\}_{t \geqq 0}$とする。又積に*associate*する半群を$T \otimes S = \{T_t \otimes S_t\}_{t \geqq 0}$とする。このとき定理3.1で得られたノルム1の射影はvon Neumann代数の積に対して*well beha-*

ved でない(不動点の空間上への射影を除いて)ので $\alpha\otimes\beta$ の代りに $T\otimes S$ の固有空間を考える。以下の目的のためにはこれで十分である。T, S, $T\otimes S$ の実固有値 λ に対する固有空間上への(定理3.1で得られた)射影をそれぞれ E_λ^T, E_λ^S, $E_\lambda^{T\otimes S}$ とおく。このとき

<u>定理4.1.</u> 任意の $\lambda\in E(T\otimes S)$ に対して

$$E_\lambda^{T\otimes S} = \sum E_{\lambda'}^T \otimes E_{\lambda''}^S$$

ここで λ', λ'' は $\lambda'+\lambda''=\lambda$, $\lambda'\in E(T)$, $\lambda''\in E(S)$ なるように動く。

<u>系4.2.</u> $E(\alpha\otimes\beta) = E(\alpha) + E(\beta)$

$$\equiv \{\lambda+\mu\ ;\ \lambda\in E(\alpha),\ \mu\in E(\beta)\}$$

<u>系4.3.</u> $M^\alpha\otimes N^\beta = (M\otimes N)^{\alpha\otimes\beta}$ が成立するのは $E(\alpha)\cap E(\beta) = (0)$ のときに限る。特に $M^\alpha\otimes M^\alpha = (M\otimes M)^{\alpha\otimes\alpha}$ となるのは $E(\alpha)=(0)$ のときに限る。

§.5. エルゴード性

d.s. (M, α, ξ) は $M^\alpha = \mathbb{C}1$ のとき ergodic であるという。次の定理は[4]において C.P.d.s. に対して示されている。

<u>定理5.1.</u> d.s. (M, α, ξ) に対して次の(1)～(4)は同値である。

(1) (M, α, ξ) が ergodic,

(2) α-不変正規状態は ω_ξ だけである,

(3) ω_ξ は M 上のすべての α-不変状態から成る凸集合の端点,

(4) (M', α', ξ) が ergodic.

エルゴード性はまた clustering 性によっても特徴づけられる。

<u>定理 5.2.</u> (M, α, ξ) のエルゴード性は次の条件に同値である。

"すべての $A, B \in M$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \omega_\xi(\alpha_s(A)B)\,ds = \omega_\xi(A)\,\omega_\xi(B) \text{"}.$$

定理3.1より 2-P.d.s. (M, α, ξ) が ergodic のとき $E(\alpha)$ は $\mathbb{R}$ の部分群になり，$E(\alpha) \ni \lambda$ に対して M_λ は $\mathbb{C}U_\lambda$（U_λ は M のユニタリ元）なる形をしていることがわかる。これは[1]で具体的構成的方法で示されている。

Ergodic d.s. の積は必ずしも ergodic とは限らない。積のエルゴード性は実固有値によって決まる。即ち

<u>定理 5.3.</u> (M, α, ξ)，(N, β, η) を2つのC.P.d.s. とする。このとき $(M\otimes N, \alpha\otimes\beta, \xi\otimes\eta)$ が ergodic となるのは，(M, α, ξ) と (N, β, η) が ergodic でかつ $E(\alpha)\cap E(\beta)=(0)$ のときに限る。

§6. 混合性

<u>定義 6.1.</u> d.s. (M, α, ξ) は次の条件をみたすとき弱混合（強混合）であるといわれる。

"すべての $A, B \in M$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\omega_\xi(\alpha_s(A)B) - \omega_\xi(A)\,\omega_\xi(B)|\,ds = 0$$

$$\left(\lim_{t\to\infty} \omega_\xi(\alpha_t(A)B) = \omega_\xi(A)\,\omega_\xi(B) \right) \text{"}$$

このとき明らかに“強混合 ⇒ 弱混合 ⇒ ergodic”である。

定理 6.2. d.s. (M, α, ξ) に対して次の4つの条件を考える。

(1) (M, α, ξ) が弱混合,

(2) 任意の $t>0$ に対して, $\{A \in M ; \alpha_t(A) = A\} = \mathbb{C}1$,

(3) $E(\alpha) = (0)$ かつ (M, α, ξ) が ergodic,

(4) (M', α', ξ) が弱混合.

このとき　(4) ⇄ (1) → (2) → (3).

さらにもし (M, α, ξ) が 2-P. なら上の4条件と次の条件はすべて同値である。

(5) すべての $\eta_1, \eta_2 \in H$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |(T_s\eta_1, \eta_2) - (\eta_1, \xi)(\xi, \eta_2)|ds = 0 .$$

(M, α, ξ) が C.P. ならば, 弱混合性はさらに積のエルゴード性によって特徴づけられる。即ち

定理 6.3. C.P.d.s. (M, α, ξ) に対して次の(1)〜(3)は同値である。

(1) (M, α, ξ) が弱混合,

(2) $(M\otimes M, \alpha\otimes\alpha, \xi\otimes\xi)$ が ergodic,

(3) $(M\otimes M, \alpha\otimes\alpha, \xi\otimes\xi)$ が弱混合.

次に強混合性に関して次の定理を得る。

定理 6.4. d.s. (M, α, ξ) に対して次の(1)〜(4)は同値。

(1) (M, α, ξ) が強混合,

(2) すべての $A \in M$, $A' \in M'$ に対して $\lim_{t\to\infty} \omega_\xi(\alpha_t(A)A') = \omega_\xi(A)\omega_\xi(A)$,

(3) すべての正規状態 $\phi \in M_*$ と $A \in M$ に対して $\lim_{t\to\infty} \phi(\alpha_t(A)) = \omega_\xi(A)$,

(4) (M', α', ξ) が強混合。

エルゴード性の場合とちがって,混合性は d.s. の積に関して compatible である。即ち

定理 6.5. (M, α, ξ), (N, β, η) を2つの C.P.d.s. とする。このとき $(M\otimes N, \alpha\otimes\beta, \xi\otimes\eta)$ が弱(強)混合なのは (M, α, ξ), (N, β, η) がともに弱(強)混合のときに限る。

References

[1] S. Albeverio and R. Høgh-Krohn, Frobenious theory for positive maps of von Neumann algebras, Comm. Math. Phys. 64 (1978), 83 - 94.

[2] D.E. Evans and J.T. Lewis, Dilations of irreversible evolutions in algebraic quantum theory, Comm. Dubl. Inst. Adv. Studies Ser. A, 24 (1977).

[3] D.E. Evans, Completely positive quasi-free maps on the CAR algebras, Comm. Math. Phys. 70 (L979), 53 - 68.

[4] A. Frigerio, Quantum dynamical semi-groups and approach to equilibrium, Lett. Math. Phys. 2 (1977), 79 - 87.

[5] G. Lindblad, On the generators of quantum dynamical semi-

groups, Comm. Math. Phys. 48 (1970), 119 - 130.

[6] E. Størmer, Spectra of ergodic transformations, J. Functional Anal. 15 (1974), 202-215.

[7] S. Watanabe, Ergodic theorems for dynamical semi-groups on operator algebras, Hokkaido Math. J. 8(1979), 176 - 190.

[8] S. Watanabe, Asymptotic behavior and eigenvalues of dynamical semi-groups on operator algebras, Preprint.