数理解析研究所講究録
第 398 巻 1980 年 98-110

$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$ 固定 $S \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ $S(\mathcal{H}_n) = \mathcal{H}_{n+1}$

$\mathcal{U}(\mathcal{H}) \supset \mathfrak{S} =$ {シフト作用素} $\supset \mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{S}} = \mathfrak{M}$

$H =$ {斉次作用素} $\supset \mathcal{S}\cdot S^*$

Invariant Subspaces of Shift Operators of Arbitrary Multiplicity

山形大 理学部 河村新蔵

$\{\mathfrak{K}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を次元の同じヒルベルト空間の族とし、$\mathfrak{H} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \oplus \mathfrak{K}_n$ とする。$\mathfrak{H}$ 上のユニタリ作用素 U が $U\mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}_{n+1}$ という性質を持つ時、U をシフト作用素という。一つのシフト作用素 S を固定して考え、$\mathfrak{K}_0$ と $\mathfrak{K}_n$ を S^n によって同一視し、$\mathfrak{K}_n$ を全て $\mathfrak{K}$ のコピーと考える。この同一視によって S は $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow (\eta_n = \xi_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ という、いわゆるシフト作用素となる。一般のシフト作用素 U を $U = WS$ $(W = US^*)$ と表現すれば W は $W\mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}_n$ なるユニタリ作用素となる。$\mathfrak{K}_n$ は $\mathfrak{K}$ のコピーであるので、W の $\mathfrak{K}_n$ への制限，u_n は $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素と見る事ができる。$\mathfrak{S}$ をシフト作用素全体としよう。$\mathfrak{S}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ に対して $W(\mathcal{S}, S) = \{W \mid W = US^*,\ U \in \mathcal{S}\}$ とする。我々の目標は $\mathcal{S}$ による不変部分空間 $\mathfrak{M}$ の構造を $\mathcal{S}$ との関係，即ち $W(\mathcal{S})$ との関係に於て研究する事である。この稿はその第一段階である。

任意に与えられた $\mathcal{S}\subset\mathfrak{S}$ に対して $\mathcal{S}$ はシフト作用素 S を含んでいると仮定して良い事をみてみよう。$\mathcal{S}$ の中から勝手にシフト作用素 U を選んできて $W=US^*$ とする。$W=\sum_{n\in Z}\oplus u_n$（$u_n$ は $\mathfrak{K}_n$ 上のユニタリ作用素）と書ける。ここで次の様に $\mathfrak{H}$ 上のユニタリ作用素 $V=\sum_{n\in Z}\oplus v_n$ を定義する。

$\mathcal{S}\ni U$
$\mathcal{S}S^*\ni US^*$
$H\ni W$
$W=\sum_n\oplus u_n$

$v_n = u_n u_{n-1}\cdots u_1\ (n\geq 1)$, $v_0 = 1$, $v_n = u_{n+1}^* u_{n+2}^* \cdots u_0^*\ (n\leq -1)$

$v_n^* u_n v_n = u_1^* \cdots u_n^* u_n u_n \cdots u_1$

この時 $V^*UV=S$、従って $\mathcal{S}'=V^*\mathcal{S}V$ は S を含む。$\mathcal{S}\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ である事と $\mathcal{S}'V^*\mathfrak{M}\subset V^*\mathfrak{M}$ である事は同値であるから、$\mathcal{S}$ の不変部分空間の代りに $\mathcal{S}'$ の不変部分空間を調べれば良いという事になる。$\mathcal{S}=\{S\}$ の場合については、Halmos [1], Helson [2] の研究が基本的である。

1. $\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{H}=\sum_{n\in Z}\oplus\mathfrak{K}_n$ の(閉)部分空間としよう。$\mathfrak{M}$ が $\mathcal{S}$ の不変部分空間（$\mathcal{S}$-不変）であるとは $\mathcal{S}\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ となる事である。ここで $\mathcal{S}\mathfrak{M}=\{Ux \mid U\in\mathcal{S},\ x\in\mathfrak{M}\}$ とし、$[\mathcal{S}\mathfrak{M}]$ を $\mathcal{S}\mathfrak{M}$ の線型閉包とする。$\mathfrak{M}$ が reducing な不変部分空間であるとは、$\mathcal{S}\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ かつ $\mathcal{S}^*\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ となる事である。

$\mathcal{S}$ に対し $M(\mathcal{S})$ として $\mathcal{S}$ から生成される von Neumann 環とする。この時次の事が成り立つ。 $\mathcal{U}(\mathcal{H})\supset\mathfrak{S}\supset\mathcal{S}\Longrightarrow M(\mathcal{S})$

<u>1-1 命題</u> $\mathfrak{M}$ が $\mathcal{S}$ の reducing な不変部分空間である事と commutant $M(\mathcal{S})'$ の適当な射影子 P に対して $\mathfrak{M}=P\mathfrak{H}$ となる事は同値である。

ここでどの様な von Neumann 環 $M(\mathcal{S})$ が現われるか考えてみよう。

<u>1-2, 例</u>. $\mathbb{T}$を1次元トーラスとし, $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T})\otimes\mathfrak{K}$ とする。$\mathfrak{K}_n = e_n\otimes\mathfrak{K}$ $(e_n(z) = z^n)$ となる。 S を $L^2(\mathbb{T})$ 上の通常のシフト作用素、即ち $S: \sum \xi_n e_n \longrightarrow \sum \xi_{n-1} e_n$ とする。 A を $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素のある集合とする。 $\mathcal{S} = S\otimes A$ は $\mathfrak{H}$ 上のシフト作用素の族で、$M(\mathcal{S}) = L^\infty(\mathbb{T})\otimes M$ となる。ここで M は A から生成された $\mathfrak{K}$ 上の von Neumann 環である。又 $W(\mathcal{S}) = 1\otimes A$ で $S^* W(\mathcal{S}) S = W(\mathcal{S})$ である。

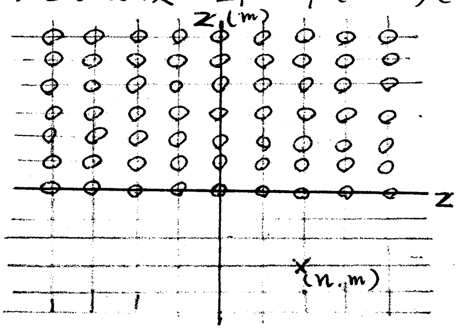
<u>1-3, 例</u>. α を $B(\mathfrak{K})$ 上の $*$-同型写像とする。 A を $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素の集合とする。 $\mathcal{S} = \{U = WS \mid W = \sum\oplus u_n,\ u_n = \alpha^n(u_0)\ \ u_0 \in A\}$ とする。 M を $\{\alpha^n(u_0) \mid u_0 \in A, n\in\mathbb{Z}\}$ から生成される von Neumann 環とすれば $M(\mathcal{S}) = W^*(M, \alpha)$ (M と α によって決定される $\mathfrak{H} = \sum\oplus\mathfrak{K}_n$ 上の接合積である。

<u>1-4, 例</u>. $\mathcal{S} = \mathfrak{S}$ とすれば $M(\mathcal{S}) = B(\mathfrak{H})$ である。

$\mathfrak{M}$ を $\mathcal{S}$ の不変部分空間とする時, $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}$ であるが, この時 $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]$ には $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneqq \mathfrak{M}$ であるか又は $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$ という二つの可能性が考えられる。 $\mathfrak{M}$ が *reducing* な部分空間であれば $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$ であるが、問題は $\mathfrak{M}$ が *non-reducing* である時に $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneqq \mathfrak{M}$ となるかという事である。

次の例によって $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]=\mathfrak{M}$ なる non-reducing $\mathcal{S}$-不変部分空間の存在を示そう。

1-5. 例　$\mathfrak{H}=L^2(\mathbb{T})\otimes L^2(\mathbb{T})$, $\mathcal{S}=\{S\otimes 1,\ S\otimes S\}$　$\mathfrak{M}=\{f\in\mathfrak{H} \mid \hat{f}(n,m)=0,\ (n,m)\notin L_1\}$ ここで $\hat{f}$ は f の Fourier 変換　$L_1=\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid m\geq 0\}$ を表わす。



(*) (n,m) は $e^{in\theta}e^{im\theta}\in L^2(\mathbb{T}^2)$ で張られる1次元ベクトル空間と考える。

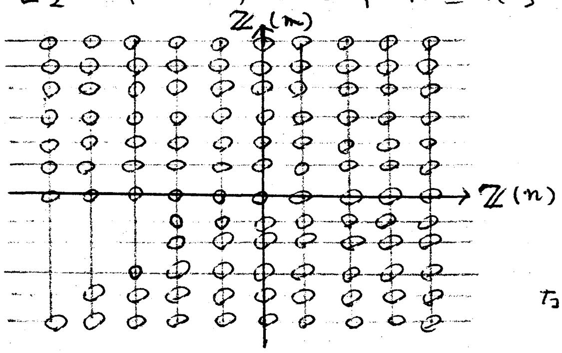
1-6. 例　$\mathfrak{H}=L^2(\mathbb{T})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus[e_n]$, $\mathcal{S}=\{U=WS \mid W=\sum\oplus u_n$　$u_n=1\ (n<0)$　$u_n=1$ 又は -1　$(n\geq 0)\}$　$f=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}e_{-n}\in\mathfrak{H}$ に対して $\mathfrak{M}=[f]\oplus H^2$ ($H^2=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus[e_n]$) とする。

$\mathcal{S}\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$ を示してみよう。$\mathcal{S}\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ は明らか。$W=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus u_n$　$u_n=1\ (n\neq 0)$, $u_0=-1$ として $U=WS$ とする。この時、$f=(S+U)f\in\mathcal{S}\mathfrak{M}$ となる 又 $(S-U)f=e_0$ であるから、任意の $g=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n\in H^2$ に対しては、$g=\alpha_0 e_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ $=(S-U)(\alpha f)+S\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n+1}e_n\right)\in\mathcal{S}\mathfrak{M}$。

我々は $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]\subsetneq\mathfrak{M}$ なる non-reducing な不変部分空間を調べる事にする。この様な部分空間を simply な不変部分空間といおう。将来の問題としては、$[\mathcal{S}\mathfrak{M}]=\mathfrak{M}$ なる場合に

ついても $[\mathcal{S}\mathfrak{m}] \subsetneqq \mathfrak{m}$ となる部分空間との関係において $\mathfrak{m}$ の構造を調べていかねばならない。ここで $[\mathcal{S}\mathfrak{m}] \subsetneqq \mathfrak{m}$ ならば $[\mathcal{S}^2\mathfrak{m}] \subsetneqq [\mathcal{S}\mathfrak{m}]$、一般に $[\mathcal{S}^n\mathfrak{m}] \subsetneqq [\mathcal{S}^{n-1}\mathfrak{m}]$ となるだろうか。次の例によってこの事は成り立たない事を示そう。

<u>1-7 例</u>. $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T})\otimes L^2(\mathbb{T})$　$\mathcal{S} = \{S\otimes 1,\ S\otimes S\}$　$\mathfrak{M} = \{f\in\mathfrak{H} \mid (n,m) \notin L_1\cup L_2\cup L_3$ ならば $\hat{f}(n,m)=0\}$　ここで $L_2 = \{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid n \geqq m\}$　$L_3 = \{(-2,-1)\}$



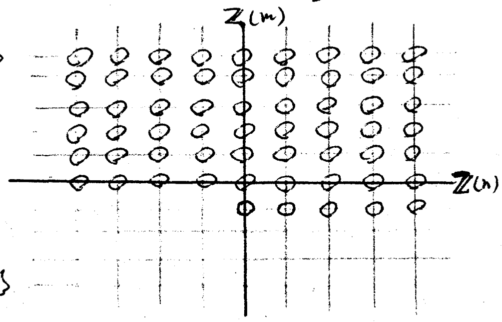
$\mathfrak{m}\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{m}] = \{f\in\mathfrak{H} \mid (n,m) \neq (-2,-1)$ ならば $\hat{f}(n,m)=0\}$　しかし $[\mathcal{S}^2\mathfrak{m}] = \{f\in\mathfrak{H} \mid (n,m)\notin L_1\cup L_2$ ならば $\hat{f}(n,m)=0\} = [\mathcal{S}\mathfrak{m}]$

更に $\mathfrak{m}\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{m}] \neq \{0\}$, $[\mathcal{S}\mathfrak{m}]\ominus[\mathcal{S}^2\mathfrak{m}] \neq \{0\}$ であれば、$\mathcal{S}(\mathfrak{m}\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{m}]) = [\mathcal{S}\mathfrak{m}]\ominus[\mathcal{S}^2\mathfrak{m}]$ であろうか。これも又成り立たない事を次の例によって示そう。

<u>1-8 例</u>　$\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T})\otimes L^2(\mathbb{T})$　(1) $\mathcal{S} = S\otimes A$, ここで $A = \{S^n\}_{n=0}^{\infty}$

$\mathfrak{M} = \{f\in\mathfrak{H} \mid (n,m)\notin L_1\cup L_4$ ならば $\hat{f}(n,m)=0\}$ ここで

$L_4 = \{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid n\geqq 0,\ m=-1\}$



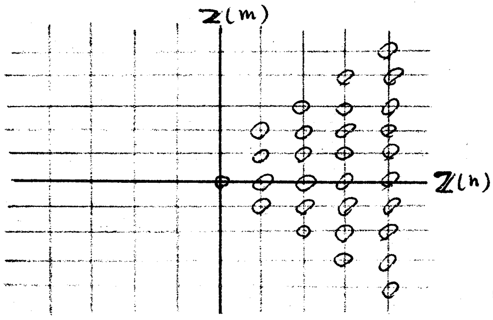
$\mathfrak{m}\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{m}] = \{f\in\mathfrak{H} \mid (n,m)\neq(0,-1)$ ならば $\hat{f}(n,m)=0\}$

$[\mathcal{S}\mathfrak{m}]\ominus[\mathcal{S}^2\mathfrak{m}] = \{f\in\mathfrak{H} \mid (n,m)\neq(1,-1)$ ならば $\hat{f}(n,m)=0\}$

$\mathcal{S}(\mathfrak{m}\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{m}]) = \{f\in\mathfrak{H} \mid (n,m)\notin L_5$ ならば $\hat{f}(n,m)=0\}$

ここで $L_5 = \{(n, m)\in \mathbb{Z}^2 \mid n=1,\ m \geq -1\}$。

(2) $\mathcal{S} = S\otimes A$, $A=\{1, S, S^*\}$ $\mathfrak{M} = \{f\in \mathfrak{H} \mid (n, m)\notin L_6\cup L_7$ ならば $\hat{f}(n, m)=0\}$ ここで $L_6 = \{(n, m)\in \mathbb{Z}^2 \mid n\geq 0,\ -m\leq n\leq m\}$ $L_7=\{(n, m)\in\mathbb{Z}^2 \mid n\geq 1,\ m=n+1\}$



$\mathfrak{M}\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{M}] = \{f\in\mathfrak{H} \mid (n, m)\neq (0,0), (1,2)$ ならば $\hat{f}(n, m)=0\}$

$[\mathcal{S}\mathfrak{M}]\ominus[\mathcal{S}^2\mathfrak{M}] = \{f\in\mathfrak{H} \mid (n, m)\neq (1,-1), (1,0), (1,1), (2,3)$ ならば $\hat{f}(n, m)=0\}$

$\mathcal{S}(\mathfrak{M}\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{M}]) = \{f\in\mathfrak{H} \mid (n, m)\neq (1,-1), (1,0), (1,1), (2,1), (2,2)$ ならば $\hat{f}(n, m)=0\}$

$\mathfrak{M}$ を $\mathcal{S}$ の不変部分空間で $\bigcap_{n=0}^{\infty}[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}]=\{0\}$ であるとしよう。この時 $\mathfrak{M}$ は pure であるという。$\mathfrak{M}$ が pure であれば $[\mathcal{S}^{n+1}\mathfrak{M}]\subsetneqq[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}]$ である。実際、$[\mathcal{S}^{n_0+1}\mathfrak{M}]=[\mathcal{S}^{n_0}\mathfrak{M}]$ であったとすれば、任意の k について $[\mathcal{S}^{n_0+k}\mathfrak{M}]=[\mathcal{S}^{n_0}\mathfrak{M}]$ であるから $\mathfrak{M}$ が pure である事に反する。

$$\mathfrak{M}_n = [\mathcal{S}^{n+1}\mathfrak{M}]\ominus[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}]$$

とすれば $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0\oplus\mathfrak{M}_1\oplus\mathfrak{M}_2\oplus\cdots$ である。

<u>1-9 定理</u> $W(\mathcal{S})$ は次の(1), (2)をみたしているとする。

(1) $W(\mathcal{S})$ は群である。

(2) $S^* W(\mathcal{S}) S \subset W(\mathcal{S})$

この時任意の pure な $\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ に対して

$$\mathfrak{M}_n=[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}_0]\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

となる。又 $W(\mathcal{S})$ が次の条件(2')をみたせば、$\mathfrak{M}_n=S^n[W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$ $(n=1,2,\cdots)$ となる

(2') $S^*W(\mathcal{S})S=W(\mathcal{S})$

[証明] 明らかに $\mathcal{S}\mathfrak{M}_0\subset\mathcal{S}\mathfrak{M}$ である。$x_0\in\mathfrak{M}_0$, $y\in\mathfrak{M}$, $W_1, W_2, W_3\in W(\mathcal{S})$ に対して

$$\langle W_1S(x_0),\ W_3SW_2S(y)\rangle=\langle x_0,\ S^*W_1^*W_3SW_2S(y)\rangle=0$$

従って $\mathcal{S}\mathfrak{M}_0$ は $\mathfrak{M}_1=[\mathcal{S}\mathfrak{M}]\ominus[\mathcal{S}^2\mathfrak{M}]$ に含まれる。同様にして $\mathcal{S}\mathfrak{M}_n\subset\mathfrak{M}_{n+1}$ となる。$\cap[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}]=\{0\}$ であるから

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0\oplus\mathfrak{M}_1\oplus\mathfrak{M}_2\oplus\cdots$$

と分解される。従って

$$[\mathcal{S}\mathfrak{M}]=[\mathcal{S}\mathfrak{M}_0]\oplus[\mathcal{S}\mathfrak{M}_1]\oplus[\mathcal{S}\mathfrak{M}_2]\oplus\cdots$$

となって $\mathfrak{M}_0$ の定義より

$$\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{M}]=\mathfrak{M}_0\oplus(\mathfrak{M}_1\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{M}_0])\oplus(\mathfrak{M}_2\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{M}_1])\oplus\cdots$$

である。従って $\mathfrak{M}_n=[\mathcal{S}\mathfrak{M}_{n-1}]$ $(n\geqq 1)$ とならねばならない。又、$W(\mathcal{S})S\subset SW(\mathcal{S})$ ((2)) であるから、$\mathfrak{M}_n=[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}_0]\subset S^n[W(\mathcal{S})^n\mathfrak{M}_0]=S^n[W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$ ($W(\mathcal{S})$ は群)、更に、$[W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$ は $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]$ と直交している。更に $W(\mathcal{S})S=SW(\mathcal{S})$ であれば $\mathfrak{M}_n=S^n[W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$ $(n\geqq 1)$ である。

我々は$[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneqq \mathfrak{M}$なる不変部分空間を調べているのであるが、必ずしもpureでないこの様な不変部分空間の構造について調べてみよう。

1-10 定理　$W(\mathcal{S})$は次の条件をみたしているとしよう。

(1) $W(\mathcal{S})$は群である。

(2) $S^*W(\mathcal{S})S \subset W(\mathcal{S})$。

この時、任意のsimplyな$\mathcal{S}$の不変部分空間は次の様に分解される。

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p \oplus \mathfrak{M}_r \quad (\mathfrak{M}_p \neq \{0\})$$

ここで$\mathfrak{M}_p$はpureな$\mathcal{S}$の不変部分空間で$\mathfrak{M}_r$はreducingな$\mathcal{S}$の不変部分空間である。

[証明]　$\mathfrak{M}_r = \bigcap_{n=1}^{\infty}[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}]$, $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}\ominus\mathfrak{M}_r$としよう。$S^*W(\mathcal{S})^*W(\mathcal{S})S \subset W(\mathcal{S})$であるから、$\mathcal{S}^*[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}]\subset[\mathcal{S}^{n-1}\mathfrak{M}]$である。従って$\mathfrak{M}_r$は$\mathcal{S}$のreducingな不変部分空間である。又$\mathfrak{M}_p$は$\mathcal{S}$の不変部分空間となる。更に、$\mathfrak{M}_p$はpureである。実際、$(\mathfrak{M}_p)_{+\infty} = \bigcap_{n\in Z}[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}_p]$は$\mathfrak{M}_p$の部分空間であるが$\mathfrak{M}_r = \bigcap_{n\in Z}[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}]$にも含まれるわけだから、$(\mathfrak{M}_p)_{+\infty}=\{0\}$である。

$\mathcal{S}$の不変部分空間$\mathfrak{M}$について$\mathfrak{M}_{-\infty}$を$\mathfrak{M}$を含む最小のreducingな部分空間としよう。$\mathcal{S}=W(\mathcal{S})\cdot S$に対して、$\widetilde{W(\mathcal{S})} = \bigcup_{n\in Z} S^n \widetilde{W(\mathcal{S})} S^{-n}$（ここで$\widetilde{W(\mathcal{S})}$は$W(\mathcal{S})$によって生成

された群）とすれば $\widetilde{\mathcal{S}} = \widetilde{W(\mathcal{S})}\cdot S$ として、$\mathfrak{M}_{-\infty} = [\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{S}}^n \mathfrak{M}]$ となる。従って $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$ であれば $\mathfrak{M}_{-\infty} = [\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{S}^n \mathfrak{M}]$ である。

<u>1-11 定理</u>　$W(\mathcal{S})$ は定理 1-9 (10) の条件 (1), (2) をみたしているとしよう。この時、任意の $\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ に対して $\mathfrak{H}$ は次の様に分解される。

(i)　$\mathfrak{H} = (\mathfrak{M}_p)_{-\infty} \oplus \mathfrak{M}_r \oplus \mathfrak{M}_c$

ここで $(\mathfrak{M}_p)_{-\infty} = \mathfrak{M}_p \oplus \mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}$ は $\mathcal{S}^*$ の不変部分空間である。(pure であるとは限らない)，更に $S^*W(\mathcal{S})S^* = W(\mathcal{S})$ であれば

(ii)　$(\mathfrak{M}_p)_{-\infty} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \oplus S^n [W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$

となり $\mathfrak{N}$ は $\mathcal{S}^*$ に関して pure である。

〔証明〕 1-11 より $\mathfrak{M}_r$ は reducing な部分空間であるから、$\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_r$ も reducing であってかつ $\mathfrak{M}_p$ を含んでいるから、$(\mathfrak{M}_p)_{-\infty} \subset \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_r$ である。又、明らかに $\mathfrak{M}_{-\infty} = (\mathfrak{M}_p)_{-\infty} \oplus \mathfrak{M}_r$ であって $\mathfrak{M}_c = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_{-\infty}$ とすればよい。ここで $\mathfrak{M}$ を pure であると仮定しよう。$S^*W(\mathcal{S})S^* = W(\mathcal{S})$ であれば $\mathfrak{M}_n = S^n [W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$ $(n\in\mathbb{Z})$ となるが (1-10, 定理) 更に $[\mathcal{S}^n \mathfrak{M}_0] = [S^n W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$ は互いに直交している。実際 $x_0, y_0 \in \mathfrak{M}_0$，$W_1, W_2 \in W(\mathcal{S})$，$n, m \in \mathbb{Z}$ $(n < m)$ に対して $\langle S^n W_1(x_0), S^m W_2(y_0)\rangle = \langle x_0, W_1 S^{m-n} W_2(y_0)\rangle = \langle x_0, W_1(S^{m-n} W_2 S^{n-m}) S^{m-n}(y_0)\rangle = 0$。従って

$$\mathcal{S}^n \mathfrak{M} = [\mathcal{S}^n \mathfrak{M}_0] \oplus [\mathcal{S}^n S W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0] \oplus [\mathcal{S}^n \cdot S^2 W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0] \oplus \cdots$$

$$= S^n[W(\mathcal{S})\mathfrak{m}_c] \oplus S^{n+1}[W(\mathcal{S})\mathfrak{m}_c] \oplus S^{n+2}[W(\mathcal{S})\mathfrak{m}_c] \oplus \cdots$$

結局、$\mathfrak{m}_{-\infty} = [\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{S}^n \mathfrak{m}] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \oplus S^n[W(\mathcal{S})\mathfrak{m}_c]$ である。

1-12系　u を $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素とする。$\sigma(u) = \{e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\}$ とする。$A = \{1, u\}$ とし、$\mathcal{S} = S \otimes A$ とする。この時、任意の $\mathcal{S}$ の不変部分空間に対して 1-11 の型の分解が得られる。

[証明]　$e^{i\theta_1} \neq e^{i\theta_2}$ として充分である。この時、A の線型閉包 $\mathrm{lin}\, A$ は $u = e^{i\theta_1}e_1 + e^{i\theta_2}e_2$ のスペクトル射影子 e_1, e_2 を含んでいる。従って $\mathrm{lin}\, A$ は $v = e_1 - e_2$ を含んでいて $v^2 = 1$ である。$B = \{1, v\}$, $\mathcal{S}' = S \otimes B$ とすれば、B は群、即ち $W(\mathcal{S}) = 1 \otimes B$ は群でかつ $S^* W(\mathcal{S}) S = W(\mathcal{S})$。又 $\mathrm{lin}\, \mathcal{S} = S \otimes \mathrm{lin}\, A = S \otimes \mathrm{lin}\, B = \mathrm{lin}\, \mathcal{S}'$ であるので $[\mathcal{S}\mathfrak{m}] = [\mathcal{S}'\mathfrak{m}]$ である。従って $\mathcal{S}$ の不変部分空間の構造は $\mathcal{S}'$ のそれと同じである。

1-12系より直ちに次の事が言える。

1-13系　$\dim \mathfrak{K} \leqq 2$ としよう。u を $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素とする。$A = \{1, u\}$　$\mathcal{S} = S \otimes A$ とする。この時、任意の $\mathcal{S}$ の不変部分空間について 1-11 の定理が成り立つ。

上の系より $\dim \mathfrak{K} \leqq 2$ の時には ~~$\mathcal{S} = \{S\otimes 1, S\otimes u\}$ の不変部~~

二つの $\mathfrak{H}$ 上のシフト作用素 S_1, S_2 に対して $\mathcal{S}=\{S_1, S_2\}$ の不変部分空間の構造は決定されたといってよい。

今まで $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]\subsetneqq\mathfrak{M}$ となる $\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ の構造を調べてきたが、今後は $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]\subsetneqq\mathfrak{M}$ なる条件と $\mathfrak{M}$ が non-reducing である事が同値になる様な $\mathcal{S}$ の条件を与えてみよう。

<u>1-14. 定理</u> $W(\mathcal{S})$ は次の条件をみたすとする。

(1) ある $k\geqq 1$ に対して $W(\mathcal{S})^k$ は群となる。

(2) $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$

この時、$\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ は $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]\subsetneqq\mathfrak{M}$ である事と non-reducing である事は同値

[証明] $\mathfrak{M}$ を $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]=\mathfrak{M}$ となる $\mathcal{S}$ の不変部分空間としよう。$W(\mathcal{S})^k$ は群であるから、任意の $n\geqq 0$ について $W(\mathcal{S})^{k+n}=W(\mathcal{S})^k$ となり、$W(\mathcal{S})^k$ は $W(\mathcal{S})^*$ を含む。$W(\mathcal{S})S=SW(\mathcal{S})$ という条件により、任意の n について、$\mathcal{S}^n=W(\mathcal{S})^n\cdot S^n$ となる。従って $\mathcal{S}^{k+1}\mathfrak{M}=W(\mathcal{S})^{k+1}S^{k+1}\mathfrak{M}=W(\mathcal{S})^kS^{k+1}\mathfrak{M}$ $=SW(\mathcal{S})^kS^k\mathfrak{M}=S\cdot\mathcal{S}^k\mathfrak{M}$。$[\mathcal{S}\mathfrak{M}]=\mathfrak{M}$ であるから $[\mathcal{S}^n\mathfrak{M}]=\mathfrak{M}\ (\forall n\geqq 1)$ となり $\mathfrak{M}=[\mathcal{S}^{k+1}\mathfrak{M}]=S\cdot[\mathcal{S}^k\mathfrak{M}]$ $=S\mathfrak{M}$ 即ち、$S^*\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$ である。更に $\mathcal{S}^*\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ である。実際、$\mathcal{S}^*\mathfrak{M}=S^*W(\mathcal{S})^*\mathfrak{M}\subset S^*W(\mathcal{S})^k\mathfrak{M}$ $=S^*S^{*k}W(\mathcal{S})^kS^k\mathfrak{M}=S^{*k+1}\mathcal{S}^k\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$。

1-14 の条件(1),(2) を落とせば一般には成り立たない。1-5 で $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$, 1-6 で $W(\mathcal{S})$ が群という条件の元でそれぞれ反例を出している。

1-15 系　$\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T})\otimes\mathfrak{K}$。$u$ を $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素で $u^k=1$ とする。$\mathcal{S}=\{S\otimes 1, S\otimes u\}$ とすれば、任意の $\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ について $[\mathcal{S}\mathfrak{M}]\subsetneq\mathfrak{M}$ と $\mathcal{S}^*\mathfrak{M}\not\subset\mathfrak{M}$ は同値である。

最後に $\mathcal{S}$ から生成された環 $A(\mathcal{S})$ について考えてみよう。$W(\mathcal{S})$ が群で $S^*W(\mathcal{S})S\subset W(\mathcal{S})$ であれば $A(\mathcal{S})$ は $\{T \mid T = SW_1+S^2W_2+\cdots+S^nW_n \quad W_i\in W(\mathcal{S})\ 1\le i\le n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ の線型閉包である。$W(\mathcal{S})^\sim = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} S^n W(\mathcal{S}) S^{*n}$ とすれば $S^*W(\mathcal{S})^\sim S = W(\mathcal{S})^\sim$ となり $M(\mathcal{S})$ は $\{T\mid T = W_{-m}S^{*m}+\cdots+W_0+\cdots+W_nS^n,\ m,n\in\mathbb{Z}\}$ の線型閉包である。ここで $A(\mathcal{S})$ と subdiagonal [3],[4] との関係について考えてみよう。$\mathfrak{H}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus\mathfrak{K}_n$ に対して、E_n を $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{K}_n$ への射影子とする。$U_t=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{int}E_n\ (t\in\mathbb{R})$ は一径数ユニタリ群で $\alpha_t = U_t \cdot U_t^*$ は $B(\mathfrak{H})$ 上の $*$-同型写像で、任意の $\mathcal{S}$ について $M(\mathcal{S})$ は α_t-不変である。なぜなら、$\alpha_t(S)=e^{it}S$, $W\in W(\mathcal{S})$ については $\alpha_t(W)=W$ である。ここで $x\in M(\mathcal{S})$ に対して Arveson Spectrum $Sp(x)$ を考えれば、$H^\infty(\alpha)=\{x\in M(\mathcal{S})\mid Sp(x)\subset[0,\infty)\}$ は subdiagonal 環である。 $A(\mathcal{S})$との関係で言えば、$S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$ のとき $H^\infty(\alpha) = A(\mathcal{S})$ となり、$S^*W(\mathcal{S})S \subsetneqq W(\mathcal{S})$ のときは $H^\infty(\alpha) \subsetneqq A(\mathcal{S})$ である。Loebl Muhly [4. Th V. 2] によれば一般の subdiagonal 環に対して 1-11 のちの分解(i)はすでに証明されている。我々の目標は subdiagonal 環における不変部分空間の構造を調べる事ではなくあるシフト作用素の族に於ける不変部分空間の構造を $\mathcal{S}$ との関係において調べる事である。

参 考 文 献

[1] P. R. Halmos, Shifts on Hilbert spaces, J. Reine Angew. Math., 208 (1961), 102-112.

[2] H. Helson, Lectures on invariant subspaces, Academic Press, London, New York, 1964.

[3] S, Kawamura, J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, J. Math. Soc. Japan, 29 (1977), 73-90.

[4] R. I. Loebl and P. S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann Algebras, J. ~~Math~~ Funct. Anal., 29 (1978), 214-252.