数理解析研究所講究録
第398巻 1980年 165-174

A structure theory in the regular monotone completion of C*algebras

東北大 理　斎藤和之

unital C*-algebra A の regular monotone completion とは monotone complete C*-algebra (従って AW*-algebra) C と A into C の injective morphism γ の対 (C, γ) で次の性質をもつものである:

(1) γ は monotone continuous homomorphism i.e. すべての A_h (A の hermitian part) の increasing net $\{x_\alpha\}$ で $x_\alpha \uparrow x \in A_h$ なるものに対して $\gamma(x_\alpha) \uparrow \gamma(x)$ in C_h (C の hermitian part),

(2) C は $\gamma(A)$ により monotone generate されている i.e. C_h が $\gamma(A_h)$ を含む C_h の最小の monotone closed subset である,

(3) $\gamma(A_h)$ は C_h で order dense i.e. C_h の任意の元 x に対して $x = \mathrm{Sup}_{C_h}\{\gamma(a) ; a \in A_h, \gamma(a) \leq x\}$.

unital C*-algebra の regular monotone completion の概念は、可分の場合は John Wright により [11], 又一般の場合は浜名 [4] により、かってな C*-algebra から non W*, AW*-algebras を構成する1つの方法として導入された。

ここでは次の問題を考察したい。

問題(1) 与えられたC^*-algebra A の性質とその regular monotone completion $\bar{A}$ の性質とはどのように影響しあうか？

問題(2) A の derivation δ, かならずしも $*$ を preserve しない automorphism β は $\bar{A}$ に一意的に拡張できるか？

$\bar{A}$ の構成法（[4], [11]）．A を unital C^*-algebra とし，その hermitian part を A_R とする。V を A_R の自然な order に関する A_R の Dedekind completion とする。それは関数解析的には次の様につくれる．X_A を A の state space，$\mathcal{B}(X_A)$ を X_A 上の bounded real Borel functions 全体のつくる real Banach algebra (積は pointwise) とし，$\mathfrak{M}$ を $\mathcal{B}(X_A)$ の元で meager な台をもつもの全体のつくる ideal とし，g を $\mathcal{B}(X_A) \longrightarrow \mathcal{B}(X_A)/\mathfrak{M}$ の canonical quotient とすると，$(\mathcal{B}(X_A)/\mathfrak{M}, g)$ は A_R の <u>unique</u> Dedekind completion である (i.e. $\mathcal{B}(X_A)/\mathfrak{M}$ は bounded complete lattice で，$g(A_R)$ は $\mathcal{B}(X_A)/\mathfrak{M}$ で order dense)．我々は $\mathcal{B}(X_A)/\mathfrak{M} = V$，$g = i$ と置こう。

今 $\bar{A}_R$ を V におけける A_R ($\equiv g(A_R)$) の <u>monotone closure</u> とすると，V が real Banach space としての A_R の injective envelope に注意して，$\bar{A}_R$ は A の C^*-algebra としての injective envelope $I(A)$ における A の monotone closure ($I(A)$ の C^*-subalgebra になる！) の hermitian part と isometrically, order isomorphic である。従って $(\bar{A}, i)$ は A の regular monotone completion である。

regular monotone completion の一意性.

<u>命題</u> (C_1, α_1), (C_2, α_2) を A の regular monotone completions とする。その時下の diagram が commute するような C_1 から C_2 の上への *-isomorphism β がある。

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[rr, "\beta"] & & C_2 \\ & A \arrow[ul, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\alpha_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \beta\alpha_1 = \alpha_2 \ .$$

証明の key point は $\beta\alpha_1 = \alpha_2$ を満す C_1 から C_2 の上への order isomorphism β を構成し、各 C_1, C_2 で $\alpha_1(A)$, $\alpha_2(A)$ がそれぞれ order dense である事に注意すると β が *-isomorphism になる。

今後記号を簡単にするために我々は A の <u>unique</u> regular monotone completion を $(\bar{A}, i)$ で表わす事にする。

もしも A が <u>non unital</u> ならば $\bar{A}_1$ (但し A_1 は A に 1 を adjoin した C*-algebra)を考え、便宜上これも $\bar{A}$ で表わすことにする。

次の定理が基本である。

<u>定理 1</u>. A を unital C*-algebra とし、I を A の closed two-sided ideal (便宜的に以後 A の ideal という事にする)とする。$\{e_\alpha\}$ を I の increasing approximate unit とすれば、$\bar{A}$ に於ける $\{e_\alpha\}$ の supremum z は $\bar{A}$ の central projection で、$\bar{I}$ から $\bar{A}z$ への下の diagram を可換にする *-isomorphism α が存在する。

$$\begin{tikzcd} \bar{I} \arrow[rr, "\alpha"] & & \bar{A}z \\ & C^*(I, z) \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

<u>注意 1</u>. I が A において essential ならば $\bar{I}$ と $\bar{A}$ とは $*$-isomorphic ($z=1$) でありさらに次の定理を得る。

<u>系 1</u>. A を C^*-algebra とし, $M(A)$ を A の multiplier algebra とすれば, $\overline{M(A)}$ と $\bar{A}$ とは同型で, $M(A)$ の $\bar{A}$ に於ける injective image は A の $\bar{A}$ に於ける idealizer である。 i.e. $\overline{M(A)}$ から $\bar{A}$ への次の可換な diagram をもつ $*$-isomorphism π がある:

$$\begin{tikzcd} \overline{M(A)} \arrow[rr, "\pi"] & & \bar{A} \\ M(A) \arrow[u] \arrow[rr, "\pi|M(A)"] & & \mathfrak{M}(A) \arrow[u] \\ & A \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

但し $\mathfrak{M}(A)$ は A の $\bar{A}$ に於ける idealizer である。

<u>注意 2</u>. もしも A が可分 (infinite dimensional) ならば $M(A)$ は可分でないが $M(A)$ は countable order dense subset をもつので $M(A)$ の regular "σ" completion $\widehat{M(A)}$ は monotone complete i.e. $\widehat{M(A)} = \overline{M(A)}$ である。

<u>系 2</u>. A が prime $\rightleftarrows$ $\bar{A}$ は factor (AW^*). [4]

これは A が必ずしも unital でなくても成立する。

渋谷[4]によれば、regular monotone completion, injective envelope の一意性から

$$Z_{\bar{A}} = A' \cap \bar{A} = A' \cap I(A) = Z_{I(A)}$$

但し Z_B は C^*-algebra B の center で A' は A の (relative) commutant とする。

定理2. A を可分 GCR algebra とすると $Z_{M(A)}$ が A の primitive ideal space $\mathrm{Prim}(A)$ 上の bounded complex continuous functions のつくる C^*-algebra $C_b(\mathrm{Prim}(A))$ と ϕ なる $*$-isomorphism により同型 (Dauns-Hofmann) に注意して、$Z_{\bar{A}}$ は $C_b(\mathrm{Prim}(A))^{\wedge}$ ($C_b(\mathrm{Prim}(A))$ の regular σ-completion) と ($\hat{\phi}$ を経由して次の diagram が commute する如く) $*$-isomorphic である。(*)

$$\begin{tikzcd}
Z_{\bar{A}} \arrow[r, "\hat{\phi}"] & C_b(\mathrm{Prim}(A))^{\wedge} \\
Z_{M(A)} \arrow[u] \arrow[r, "\phi"] & C_b(\mathrm{Prim}(A)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

定理1の別の応用として次の事が成立する。

定理3. (1) A が GCR $\Leftrightarrow$ かってな A の ideal I に対して、$\overline{A/I}$ は type I.

$\Leftrightarrow$ $\forall J \in \mathrm{Prim}(A)$ に対して、$\overline{A/J}$ は type I factor

(自動的に W^*)

(2) A が NGCR $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ は type I direct summand をもたぬ。

もし A が可分 NGCR なら $\bar{A}$ は W^* 直和因子をもたぬし、又 $\partial X_{\bar{A}}$ が weakly に可分にもかゝわらず、non trivial な可分な表現をもたぬ。

(*) $\mathrm{Prim}(A)$ が Hausdorff なる仮定はいらぬ。

系3. Aが primitive 可分なら，もしAがGCRなら $\bar{A}$ は type I W^* factor，AがNGCRならば $\bar{A}$ は non W^*, type III AW^* factor である。

"W^*-closure" と "AW^*-closure" のちがいは次の定理により明らかにされる。

定理4. 可分な C^*-algebra A に対して，$\overline{A/I}$ がすべてのAの ideal に対して W^*-algebra $\rightleftarrows$ Aが scattered となる事。

この事はもし可分な C^*-algebra A に対して，$\bar{A}$ が W^* ならば，$\bar{A}$ は atomic であり 又さらに一般の C^*-algebra B に対して，Bが scattered $\rightleftarrows$ $\overline{B/I}$ が atomic W^*-algebra $\forall$ ideal I of B. であるという命題を使って証明する。

注意3. (1) $\bar{A}$ はAの second dual A'' のように universal ではない。実際 Behnke-Krauß-Leptin は Aの(non zero な) primitive ideals が decreasing sequence J_n ($n \in N$ 自然数) なる如き可分, primitive NGCR C^*-algebra Aを構成した。さらに $J_n/J_{n+1} = C(K)$ がある Hilbert space について成立し A/J_n は primitive GCR ($\forall n$) なるものを構成した。$\bar{A}$ は non W^*, type III, AW^*-factor であるが $J_n (\neq \{0\})$ に対して，$\overline{A/J_n}$ はすべて type I W^* factor である。

(2) $A \subseteq B$ (C^*-subalgebra) $\Rightarrow$ $\bar{A} \subseteq \bar{B}$? (C^*-subalgebra). "否" である。Aが separable infinite dimensional Hilbert space H に作用し，$A \cap C(H) = \{0\}$ なる UHF-algebra とする。$B = A + C(H)$ は，$\bar{B} = B(H)$ なる可分 C^* algebra 一方 $\bar{A} \subset B(H)$ (C^* subalgebra) とすると，

$\bar{A}$は自明でない可分な表現をもつことになり矛盾である。

(3) 残された問題として primitive separable NGCR-algebra A に対する $\bar{A}$ (non W^*, type III AW^*-factor) の分類があるが これについては今のところまったく不明である。

次に問題(2)について考えよう。C^*-algebra A 上の各 derivation δ が $\bar{A}$ 上に一意に拡張できるか? automorphism についてはどうか?

答は "yes" である。これらは浜名, 岡安, 筆者の共同研究である[5]。

Bを必ずしも unital でない C^*-algebra とし $\mathrm{Der}(B)$ を B 上のすべての derivation s のつくる Lie algebra とし, $\mathrm{Der}(B; C)$ を $\delta \in \mathrm{Der}(A)$ の元で, B の C^*-subalgebra C に対して $\delta(C) \subset C$ なる如きもの全体のつくる Lie subalgebra とする。

$(B_R)^m$ を B の injective envelope $I(B)$ に於ける B_R の元から成る increasing net の supremum 全体の集合とする。$(B_R)^m \subset \bar{B}$ に注意しよう。

<u>定理5</u>. (1) $\forall \delta \in \mathrm{Der}(I(A); A)$ に対して, $\|\delta\| = \|\delta | A\|$ で, $\exists g \in (A_R)^m + i(A_R)^m \ (\subset \bar{A}) : \delta = \mathrm{ad}\, g$,

(2) $\forall \delta \in \mathrm{Der}(A)$ に対して, $\exists_1 I(\delta) \in \mathrm{Der}(I(A); A)$:

$I(\delta)|A = \delta$ 且つ mapping $\mathrm{Der}(A) \ni \delta \longmapsto I(\delta) \in \mathrm{Der}(I(A), A)$

は $\mathrm{Der}(A)$ onto $\mathrm{Der}(I(A), A)$ の isometric Lie isomorphism である。

(3) $I(\delta)$ が skew adjoint $\rightleftarrows$ δ が skew adjoint.

上の一意性の証明及び次の定理の証明には 次の $I(A)$ の <u>essential</u>

propertyが本質的である。

命題 $A \subset B \subset I(A)$ なるかってな C^*-algebra B に対して B からかってな C^*-algebra C へのcompletely positive map Φ に対して、$\Phi|A$ がcompletely isometricなら Φ 自身completely isometricである[3]。

derivation δ のminimal generator $h(\delta)$ の一意性[Halpern]及び $\bar{A}$ のessential propertyによれば次の事が成立する。

定理 6. $D(A)$ を $\{A, h(\delta), \delta \in Der(A)\}$ によりgenerateされた C^*-algebraとする。この時、$D(A)$ は次の性質を満す。

(1) $D(A)$ は $\bar{A}$ の C^*-subalgebraである、

(2) 各 $\delta \in Der(A)$ に対して、$\exists\, h(\delta) \in D(A)$: $\delta = ad\, h(\delta)|A$, $\frac{1}{2}\|\delta\| = \|h(\delta)\|$,

(3) $\forall$ ideal J of $D(A)$ で $J \cap A = \{0\}$ なるものは $J = \{0\}$,

(4) もし A がfactorialならば、$D(A)$ は境氏の意味の A に対するderived algebraである。

ρ を C^* algebra A のautomorphismとすると、一意的に $\rho = \pi\eta$ π は A の $*$-automorphism、η はpositive automorphism (i.e $\eta'(x) = (\eta^{-1}(x^*))^*$ としたとき、$\eta' = \eta$, $Sp(\eta) \subset (0, +\infty)$) と分解できる事が知られている[6,7]。$\eta = (\rho'\rho)^{1/2}$ である。η をderivationに変形しそれを $\bar{A}$ まで拡大し又もとにもどすと、ρ は $\bar{A}$ まで($I(A)$) uniqueにextendできる。この事に注意すると次の事が

成立する。

<u>定理 7</u>. (1) $\forall \rho \in Aut(A)$ に対して, unique な $I(\rho) \in Aut(I(A);A)$ が $I(\rho)|A = \rho$ なる如く存在し,

$$\rho \longmapsto I(\rho)$$

は $Aut(A)$ onto $Aut(I(A);A)$ の uniformly bicontinuous group isomorphism である,

(2) $I(\rho)$ が $*$-preserving (resp. positive) $\rightleftarrows$ ρ が $*$-preserving (resp. positive),

(3) $I(\rho_t)$ $(-\infty < t < \infty)$ が uniformly continuous one parameter group $\rightleftarrows$ ρ_t $(-\infty < t < \infty)$ が uniformly continuous one parameter group, でこの時, $I(\rho_t)$ は $I(\rho_t) = \mathrm{Ad}\, \exp tg$ $\forall t$ $(-\infty < t < \infty)$ with $g \in \overline{A}$ を満す。

References

[1] H. Behnke, F. Krauss and H. Leptin, C*-algebren mit geordneten ideal Folgen, J. Functional Anal., 10(1972), 204-211.

[2] H. Halpern, The norm of an inner derivation of an AW*-algebra, Preprint.

[3] M. Hamana, Injective envelopes of C*-algebras, J. Math. Soc. Japan, 31(1979), 181-197.

[4] ————, Regular embeddings of C*-algebras in monotone complete C*-algebras, To appear in J. Math. Soc. Japan.

[5] ————, T. Okayasu and K. Saitô, Extensions of derivations and automorphisms from C*-algebras to their injective envelopes, To appear.

[6] T. Okayasu, A structure theorem of automorphisms of von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., 20(1968), 199-206.

[7] ————, Polar decomposition for isomorphisms of C*-algebras, Tôhoku Math. J.,26(1974), 541-554.

[8] S. Sakai, Derived C*-algebras of primitive C*-algebras, Tôhoku Math. J., 25(1973), 307-316.

[9] K. Saitô, AW*-algebras with monotone convergence property and examples by Takenouchi and Dyer, Tôhoku Math. J.,31(1979), 31-40.

[10] ————, A structure theory in the regular σ-completion of a C*-algebra, To appear in J. London Math. Soc..

[11] J.D.M. Wright, Regular σ-completion s of C*-algebras, J. London Math.J., 12(1976), 299-309.

[12] ————, Wild AW*-factors and Kaplansky-Rickart algebras, J. London Math. Soc., 13(1976), 83-89.

$$N = (\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}) \subset (\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})\rtimes\mathbb{Z} = H$$

$$\hat{N} = \mathbb{T}\oplus\mathbb{T} \qquad \chi \downarrow \mathbb{T}^1$$

$$\chi\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = e(\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2$$

$$\Big\downarrow \begin{matrix}\mathrm{Ind}\ \varphi \\ N\uparrow H\end{matrix}$$

$$\nu(L^2(H/N \cong \mathbb{Z}))$$

$$\phi(h\cdot z) = \phi(h)\,\chi(z)$$

$$\left(\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, m\right)\left(\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}, 0\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, m+0\right)$$

$$= \left(\begin{matrix} m_1 + n_1 \\ m_2 + m n_1 + n_2 \end{matrix}, m\right)$$

$$\begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 + m n_1 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, m\right) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -m n_1 \end{bmatrix}, m\right)\cdot\left(\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, 0\right)$$

$$\phi\left(\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, m\right) = \phi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -m n_1 \end{bmatrix}, m\right)\chi\left(\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, 0\right)$$