数理解析研究所講究録
第 399 巻 1980 年 143-160

STRONGLY REDUCTIVE OPERATORS について

富山大学 理学部 北野孝一

Hilbert space H 上の operator T が reductive である $\Longleftrightarrow$
任意の closed subspace $M \subset H$, $TM \subset M \Rightarrow T^*M \subset M$ $\Longleftrightarrow$
$(1-P)TP = 0$ for $\forall P : P^2 = P = P^* \Rightarrow PT = TP$.

Hermitian operator は reductive であり、non-Hermitian operator で reductive なものは多く知られているが、non-normal operator で reductive な operator は知られていない。このような事実にもとずいて次の予想が考えられる。

$\boxed{\text{Reductive operator conjecture}}$

Every reductive operator is normal.

30年以上にもわたって、operator theory の中でも最も困難な問題である。

$\boxed{\text{Invariant subspace conjecture}}$

Every operator on a Hilbert space has a non-trivial invariant subspace.

この2つの問題が同値であることが証明された[DPP].
normal operator との関連では、"Which normal operators are reductive?"という問題は、Wermer (1952)以後多くの研究がある。

$\boxed{\text{THEOREM.}}$ [W] normal operator T に対して、T の spectrum, $\sigma(T)$, が複素平面を分けない($\sigma(T)$ の complement が connected)で、内点も持たない $\Rightarrow$ T は reductive である。

$\boxed{\text{THEOREM}}$ [S:1] normal operator T に対して、T が reductive である. $\Leftrightarrow$ $T^* \in$ the closure, with respect to the weak operator topology, of the set of polynomials in T.

reductivity の spectral criterion については、

$\boxed{\text{THEOREM}}$ [S:2] normal operator T に対して、μ を a finite positive measure in the plane which is mutually absolutely continuous w.r.t spectral measure of T とするとき、T が reductive である. $\Leftrightarrow$ the set of polynomials is weak-star dense in $L^\infty(\mu)$.

Reductive operator に関連して、Harrison は strong reductivity の概念を導入した[Har].

$\boxed{\text{DEFINITION}}$ operator T が strongly reductive である $\Leftrightarrow$ for $^\forall\varepsilon>0$, $^\exists\delta>0$ $\|PTP-TP\|<\delta \Rightarrow \|TP-PT\|<\varepsilon$

for all P : $P^2 = P = P^*$ $\Longleftrightarrow$ $\varepsilon_T(\delta) = \sup\{\|(1-P)T^*P\| : \|(1-P)TP\| < \delta\} \to 0$ for $\delta \searrow 0$. 但し P は $P^2=P=P^*$ を満たして動くものとする。（簡単にいえば "almost invariant" under T $\Rightarrow$ "almost reduces" T ということ。）

この報告では、次の定理を目標に話を進める。

THEOREM [AFV:2] Every strongly reductive operator is normal.

Strongly reductive operators の性質 [Har]

1. Hermitian operators は strongly reductive である。
2. Strongly reductive operators は reductive である。
3. Strongly reductive operator の adjoint は strongly reductive である。

(∵) $\forall T$, $\forall$ proj. P に対して, $Q = 1-P$ とおけば $\|PT^* - T^*P\| = \|QT - TQ\|$, $\|(1-P)T^*P\| = \|(1-Q)TQ\|$ であることより.

4. T^* が the uniform limit of sequence of polynomials in T $\Rightarrow$ T は strongly reductive である.

(∵) $\forall \varepsilon > 0$, q : any polynomial $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$: $\|(1-P)q(T)P\| < \varepsilon$ ここで P は orthogonal proj. で $\|(1-P)TP\| < \delta$ である。これを polynomial の degree についての induction で証明する. q が constant polynomial なら自明 ($(1-P)q(T)P = 0$ より)、次

に degree of polynomial $= k$ のとき成り立つとする。q の degree $= k+1$ とする。$r(z) = (q(z) - q(0))z^{-1}$ とおけば、r の degree $= k$. 従って $\|(1-P)q(T)P\| = \|(1-P)(q(T) - q(0)1)P\|$ $= \|(1-P)T(1-P+P)r(T)P\| \leqq \|(1-P)T(1-P)r(T)P\| + \|(1-P)TPr(T)P\|$ $\leqq \|T\|\|(1-P)r(T)P\| + \|(1-P)TP\|\|r(T)\|$ 従って q に対して成立つ。

次に $^\forall \varepsilon > 0$, q : polynomial s.t. $\|T^* - q(T)\| < \varepsilon/2$, $\delta > 0$ s.t. $\|(1-P)q(T)P\| < \varepsilon/2$ whenever $\|(1-P)TP\| < \delta$ とするならば $\|(1-P)T^*P\| < \|(1-P)q(T)P\| + \varepsilon/2 < \varepsilon$ 従って T^*, 即ち T が strongly reductive である。

5、T を normal とするとき、$\sigma(T)$ が平面を分けないで、内点も持っていない。$\Rightarrow$ T は strongly reductive である。

(∵) 後出の $\boxed{X}$ 及び 4. より従う。

これより定理の証明に必要なことを順に述べて行く。

$\boxed{I}$ T : strongly reductive operator on H, X : operator on K (some Hilbert space) s.t. $\|X - U_jTU_j^{-1}\| \to 0$ $(j \to \infty)$ ここで U_j $(j = 1, 2, \cdots)$ は unitary op's $H \to K$ である。
$\Rightarrow$ X : strongly reductive.

<u>Proof.</u> for $\delta > 0$, P : K 上の orthogonal proj. s.t. $\|(1-P)XP\| < \delta$ $T_j = U_jTU_j^{-1}$ とおいて、j を十分大きくとって $\|X - T_j\| < \delta - \|(1-P)XP\|$ とする。for $P_j = U_j^{-1}PU_j$ (H 上の orthogonal proj. となる) $\|(1-P_j)TP_j\| < \delta$ である。これは $(1-P_j)TP_j =$

$U_j^{-1}(1-P)T_jPU_j = U_j^{-1}\{(1-P)(T_j-X)P+(1-P)XP\}U_j$ よりいえる.

さて、$\|(1-P)X^*P\| \leqq \|X^*-T_j^*\| + \|(1-P)T_j^*P\| = \|X-T_j\| +$ $\|(1-P_j)T^*P_j\| \leqq \|X-T_j\| + \varepsilon_T(\delta)$ 即ち $j\to\infty$ として. $\|(1-P)X^*P\| \leqq \varepsilon_T(\delta)$. よって X が strongly reductive であることがわかる.

$\boxed{\mathrm{II}}$ T: strongly reductive operator on H (separable).

$\Rightarrow$ T^*T-TT^* : compact.

<u>Proof.</u> $\mathfrak{A}$: the C^*-algebra with unity, generated by the image $\tilde{T}$ of T in the Calkin algebra $B(H)/K(H)$.

ρ: a faithful C^*-representation of $\mathfrak{A}$ on a separable Hilbert space H_ρ とする. [V: Theorem 1.3] より $\boxed{\mathrm{I}}$ における X として、$X = T\oplus\rho(\tilde{T})\oplus\rho(\tilde{T})$ とおく. これは strongly reductive となり、従って reductive となる. P を orthogonal proj. $H\oplus H_\rho\oplus H_\rho \xrightarrow{\text{onto}} \{0\oplus h\oplus\rho(\tilde{T})h : h\in H_\rho\}$ とすると、$(1-P)XP=0$ 従って $\|(1-P)X^*P\|=0$. よって $\rho(\tilde{T})^*\rho(\tilde{T})h =$ $\rho(\tilde{T})\rho(\tilde{T})^*h$ for $\forall h\in H_\rho$ 即ち $\rho(\tilde{T}^*\tilde{T}-\tilde{T}\tilde{T}^*)=0$. faithful であるから $\widetilde{T^*T-TT^*} = \tilde{T}^*\tilde{T}-\tilde{T}\tilde{T}^*=0$.

$\boxed{\text{Strongly reductive operator の spectrum の性質}}$ [Har]

$B(H)$: the algebra of all operators on H. $\mathcal{C}(H) = B(H)/K(H)$: the Calkin algebra ($K(H)$: the ideal of compact operators on H).

$B(H)$ から $\mathcal{C}(H)$ の上への canonical map による T の image を $\tilde{T}$

即ち，$\tilde{T} = T + K(H)$ とする．T の spectrum を $\sigma(T)$，left spectrum or approximate point spectrum を $\sigma_\ell(T)$ で，T の essential spectrum を $\sigma_e(T)$ $(= \sigma(\tilde{T}))$，left essential spectrum を $\sigma_{\ell e}(T)$ $(= \sigma_\ell(\tilde{T}))$ で表わす。これらは non-empty compact subset of the plane で次の関係が成り立っている。$\sigma(T) = \sigma_\ell(T) \cup \sigma_\ell(T^*)^-$，$\sigma_e(T) = \sigma_{\ell e}(T) \cup \sigma_{\ell e}(T^*)^-$．ここで $-$ は complex conjugate を表わす。

left spectra については，次が成立つ（bounded below という概念で特徴づけられる）。

(1) [例えば Hal:1] $\lambda \in \sigma_\ell(T) \iff {}^\exists\{\varphi_n\}$: seq. of unit vectors s.t. $\|(T-\lambda)\varphi_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

(2) [FSW] $\lambda \in \sigma_{\ell e}(T) \iff {}^\exists\{\varphi_n\}$: orthogonal seq. of unit vectors s.t. $\|(T-\lambda)\varphi_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

$\boxed{\text{III}}$ T: strongly reductive, $\{\varphi_n\}$: seq. of unit vectors s.t. $\|(T-\lambda)\varphi_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$ for some λ $\Longrightarrow$ $\|(T^*-\bar{\lambda})\varphi_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$.

<u>Proof.</u> P_n: orthogonal proj. onto span φ_n とする．$P_n\psi = (\psi, \varphi_n)\varphi_n$ for ${}^\forall\psi$．だから $\|(1-P_n)TP_n\| = \|(1-P_n)T\varphi_n\| = \|(1-P_n)(T-\lambda)\varphi_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$ であり，T が strongly reductive であるから $\|(1-P_n)T^*P_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$ を得る．即ち $\|T^*\varphi_n - P_nT^*\varphi_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$ ところで $P_nT^*\varphi_n = (T^*\varphi_n, \varphi_n)\varphi_n = (\varphi_n, T\varphi_n)\varphi_n$，$(\varphi_n, T\varphi_n) \to \bar{\lambda}$ $(n\to\infty)$ であるから $\|(T^*-\bar{\lambda})\varphi_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$ を得る。

$\boxed{\text{IV}}$ T: strongly reductive $\Longrightarrow$ $\sigma(T) = \sigma_\ell(T)$，$\sigma_e(T) = \sigma_{\ell e}(T)$.

<u>Proof.</u> $\sigma_\ell(\cdot)$ の characterization 及び $\boxed{\text{III}}$ より $\sigma_\ell(T)=\sigma_\ell(T^*)^-$, $\sigma_{\ell e}(T)=\sigma_{\ell e}(T^*)^-$ ところで $\sigma(T)=\sigma_\ell(T)\cup\sigma_\ell(T^*)^-=\sigma_\ell(T)$, $\sigma_e(T)=\sigma_{\ell e}(T)\cup\sigma_{\ell e}(T^*)^-=\sigma_{\ell e}(T)$ であることがわかる。

$\boxed{\text{V}}$ T: strongly reductive $\Rightarrow$ $\sigma(T)$: the union of $\sigma_e(T)$ and isolated normal eigenvalues of finite multiplicity.

<u>Proof.</u> $\boxed{\text{IV}}$ より $\sigma(T)=\sigma_\ell(T)$, $\sigma_e(T)=\sigma_{\ell e}(T)$, それに $\sigma_{\ell e}(T)\subset\sigma_\ell(T)$ であるから、$\lambda\in\sigma_\ell(T)\setminus\sigma_{\ell e}(T)$ とする。$\lambda\notin\sigma_e(T)$ より $\ker(T-\lambda)$ は finite dimensional しかも $(T-\lambda)$ は、bounded below on $\ker(T-\lambda)^\perp$, $\lambda\in\sigma_\ell(T)$ より $\ker(T-\lambda)$ は non-trivial である。従って λ は T の finite multiplicity な eigenvalue であることがわかる。T が strongly reductive であるから、$\boxed{\text{III}}$ から λ が normal eigenvalue、即ち $T\varphi=\lambda\varphi\Rightarrow T^*\varphi=\bar\lambda\varphi$ もわかる。

次に、λ が isolated point of $\sigma_\ell(T)$ を示そう。$\ker(T-\lambda)$ は invariant under T であり、T が strongly reductive より $\ker(T-\lambda)$ は reduces T である。それで $T'=T|\ker(T-\lambda)^\perp$ とするとき、$\lambda\notin\sigma_\ell(T')$, $\sigma_\ell(T')$ compact set であるから $\exists\delta>0$ s.t. $\mu\notin\sigma_\ell(T')$ for $|\mu-\lambda|<\delta$ ところで $\sigma_\ell(T)=\{\lambda\}\cup\sigma_\ell(T')$ であるから λ が isolated in $\sigma_\ell(T)$ が得られる。

$\boxed{\text{VI}}$ [AFV:1] operator T が quasitriangular である。
$\Longleftrightarrow$ $\{\lambda\notin\sigma_{\ell e}(T);\ \dim\ker(T-\lambda)<\dim\ker(T^*-\bar\lambda)\}=\phi$
(T: quasitriangular $\Longleftrightarrow$ $\exists\{P_n\}$: proj.'s of finite rank which

conv. to 1 in the strong topology s.t. $\{\|P_nTP_n - TP_n\|\} \to 0$ $(n\to\infty)$).

$\boxed{\mathrm{V}}$より T: strongly reductive $\Rightarrow$ T: quasitriangular であることがわかる ((∵) $\boxed{\mathrm{IV}}$, $\boxed{\mathrm{V}}$より $\lambda \notin \sigma_{le}(T)$ に対して $\dim \ker(T-\lambda) = \dim \ker(T^* - \bar{\lambda})$ であるから).

$\boxed{\mathrm{VII}}$ [AF] T: strongly reductive, $\mathfrak{A}(T)$ (= the uniformly closed, inverse closed algebra generated by $\{T, 1\}$): contains an operator S s.t. $\|S\| \neq \|\tilde{S}\|$ $\Rightarrow$ $\exists$ proper invariant subspace for all operators $\in \mathfrak{A}(T)$.

先ず、$\boxed{\mathrm{VII}}$の証明に必要な準備をする.

$\boxed{\mathrm{VIII}}$ T: quasitriangular, $\mathfrak{A}(T) \ni S$ s.t. $\|S\| \neq \|\tilde{S}\|$

$\Rightarrow$ $\exists$ $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$: finite rank proj.'s s.t.

(1) $\|(1-P_n)LP_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$ for $\forall L \in \mathfrak{A}(T)$.

(2) $P_n \longrightarrow A$ weakly $(n\to\infty)$.

(3) $A \neq \lambda 1$ (not a scalar multiple of 1 ということ).

Proof. E: spectral measure of $(S^*S)^{1/2}$, fix some $\rho > 0$ s.t. $\|\tilde{S}\| < \rho < \|S\|$ に対して $S_\rho = SE([\rho, \|S\|])$ とおく. このとき, $\|S\| \in \sigma_p\{(S^*S)^{1/2}\}$ point spectrum, S_ρ: finite rank でしかも $S^*S_\rho = S_\rho^*S$ である. fix $\alpha > 0$ s.t. $\alpha < (\|S\| - \rho)^{-1}\|S\|$, $\forall e \in H$ unit vector, に対して T が quasitriangular より (see cf. [CF: P.P. 179-182]) $\exists$ two sequences $\{P_n'\}_{n=1}^{\infty}$, $\{P_n''\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. finite rank proj.'s $P_n' \leqq P_n''$, rank $R_n = 1$ (但し $R_n = P_n'' - P_n'$ とする)

$(P_n' e, e) \leqq \alpha \leqq (P_n'' e, e)$, $\|(1-P_n')TP_n'\| \to 0$ かつ $\|(1-P_n'')TP_n''\| \to 0$. 従って $\|(1-P_n')LP_n'\| \to 0$ $(n\to\infty)$ かつ $\|(1-P_n'')LP_n''\| \to 0$ $(n\to\infty)$ for $\forall L \in \mathfrak{A}(T)$. 今 e_n : unit vector $\in$ image of R_n とする. 必要ならば部分列を選べばよいから $\{e_n\} \xrightarrow{w} e_0$, $\{P_n'\}$, $\{P_n''\}$: conv. in the weak operator topology としておいてよい. 以下 $\{P_n'\}$ or $\{P_n''\}$ が求める seq. であることを示す. 求める seq. でないと仮定して, $P_n' \xrightarrow{w} \beta 1$ 及び $P_n'' \xrightarrow{w} \gamma 1$, z : unit vector $(z, e_0) = 0$, $\beta \leqq \alpha \leqq \gamma$ とする. $\lim (R_n z, z) = \lim ((z, e_n) e_n, z) = \lim |(z, e_n)|^2 = |(z, e_0)|^2 = 0$ 及び $\lim (R_n z, z) = \lim (P_n'' z, z) - \lim (P_n' z, z) = \gamma - \beta$ 従って $\alpha = \beta = \gamma$. 今ここで, u : unit vector of $(S^*S)^{1/2}$ belonging to the eigenvalue $\|S\|$ とする. $\|S_\rho u\| = \|S\|$, $\lim \|P_n' x\| = \sqrt{\alpha}\, \|x\|$ 及び $\lim \|S_\rho P_n' x - \alpha S_\rho x\| = 0$ for $\forall x \in H$. それから $(P_n' S P_n' u, S_\rho u) = (S P_n' u, S_\rho u) + ((P_n' S P_n' - S P_n') u, S_\rho u) \longrightarrow \alpha (S u, S_\rho u) = \alpha (u, S^* S_\rho u) = \alpha \|S_\rho u\|^2 = \alpha \|S\|^2$ また, $(P_n' S_\rho P_n' u, S_\rho u) = (S_\rho P_n' u, P_n' S_\rho u) \longrightarrow \alpha^2 \|S\|^2$ 従って $(P_n'(S - S_\rho) P_n' u, S_\rho u) \longrightarrow (\alpha - \alpha^2)\|S\|^2$ 一方 $(P_n'(S - S_\rho) P_n' u, S_\rho u) =$ $|((S - S_\rho) P_n' u, P_n' S_\rho u)| \leqq \|S - S_\rho\| \|P_n' u\| \|P_n' S_\rho u\| \leqq \rho \|P_n' u\| \|P_n' S_\rho u\| \longrightarrow \rho \sqrt{\alpha}\, \|u\| \cdot \sqrt{\alpha}\, \|S_\rho u\| = \rho \alpha \|S\|$ ゆえに $(\alpha - \alpha^2)\|S\|^2 \leqq \rho \alpha \|S\|$ or $\alpha \|S\| \geqq \|S\| - \rho$ これは α のとり方に矛盾する。

<u>Proof of $\boxed{\text{VIII}}$</u> Tは strongly reductive であるから $\boxed{\text{IV}}$, $\boxed{\text{V}}$, $\boxed{\text{VI}}$ より、Tは quasitriangular となる. $\boxed{\text{VIII}}$で選んだような finite rank の proj.'s $\{P_n\}$ で、$P_n \xrightarrow{w} A$, Aは non-scalar Hermitian operator とできる. ところで $\|P_nTP_n - TP_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$、T: strongly reductive より $\|TP_n - P_nT\| \to 0$ 従って $TA = AT$ ゆえに $LA = AL$ for $\forall L \in \mathfrak{A}(T)$. A: Hermitian であるから $\forall$ non-trivial spectral subspace of A reduces all the operator in $\mathfrak{A}(T)$.

$\boxed{\text{REMARK}}$ [St: 1] $\|T\| \neq \|\tilde{T}\| \Rightarrow M_T = \{x \in H : (T^*T)^{1/2}x = \|T\|x\} = \{x \in H : \|Tx\| = \|T\|\|x\|\}$ is a non-trivial, finite dimensional space. ここで Tが hyponormal ならば M_T は invariant under T となる。

$\boxed{\text{IX}}$ T: strongly reductive, $\dim H > 1 \Rightarrow \exists$ non-trivial invariant subspace for T (reducing subspace for Tとなる).

<u>Proof.</u> $\dim H < \infty$: Tは normal operator となってしまう.
$\dim H > \aleph_0$: Tは reduce される subspace として separable subspace が作れる. $\dim H = \aleph_0$ の場合を考えればよい.
$\sigma(T)$についての$\boxed{\text{V}}$、それと$\boxed{\text{VI}}$より Tは quasitriangular operator となることわかる. 場合を分けて、

(1) for some polynomial $p(\lambda)$: $\|p(T)\| \neq \|\widetilde{p(T)}\|$
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{VIII}}$より、$\exists$ non-trivial reducing subspace of T.

(2) for any polynomial $p(\lambda)$: $\|p(T)\| = \|\widetilde{p(T)}\| = \|p(\tilde{T})\|$ のとき、
$\boxed{\text{II}}$ より、$\tilde{T}$ は normal in Calkin algebra, $\|p(T)\| = \|p\|_{C(\sigma(\tilde{T}))}$ ($= \max\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(\tilde{T})\}$) ところで $\sigma(\tilde{T}) \subset \sigma(T)$ であり、
T が strongly reductive より、後で示す $\boxed{\text{XIII}}$ より $\sigma(T)$ は平面を分けない (complement が connected ということ) し、かつ内点も持たない。Lavrentiev's theorem [G : p48]: (Let K be a compact plane set. Then $P(K) = C(K)$ if and only if K is nowhere dense and the complement of K is connected.)
より the map : $p|_{\sigma(\tilde{T})} \longmapsto p(T)$ を $C(\sigma(\tilde{T})) \longrightarrow B(H)$ の map に isometric, algebraic に extend してやる.

(イ) $\sigma(\tilde{T}) = \{\lambda\}$ single point $\Rightarrow$ $\tilde{T} = \lambda 1$ i.e. $T = \lambda 1 + K$, K は compact operator となるから定理が成立つ.

(ロ) $\sigma(\tilde{T}) \neq$ single point のとき、f, g : continuous functions on $\sigma(\tilde{T})$ not vanishing identically s.t. $fg = 0$
$\Rightarrow$ $f(T) \neq 0$, $g(T) \neq 0$, $f(T)g(T) = 0$ であるから T は $f(T)$, $g(T)$ の non-trivial null spaces を invariant にする.

<u>Proof of THEOREM.</u> H は separable としてよい (see. $\boxed{\text{IX}}$ の Proof.) また $M \subset H$: $T|_M$: normal となる largest reducing subspace M を除いて考えればよい [例えば, A]. 従って、for $\forall$ subspace $M \subset H$; reducing T に対して $T|_M$: not normal と仮定して進めればよい. $\dim M = \aleph_0$ となるから

(finite dimension なら normal となってしまう). $\boxed{\text{IX}}$ より、存在性がいえるのですが for $\forall$ maximal totally ordered family $\mathfrak{F}$ of invariant subspaces K for T and for $\forall K_0 \in \mathfrak{F}$, the continuity properties i.e. $\bigvee\{K : K \subsetneqq K_0, K \in \mathfrak{F}\} = K_0 = \bigcap\{K : K \supsetneqq K_0, K \in \mathfrak{F}\}$ が成り立つ. $\{0\}, H \in \mathfrak{F}$ である. T strongly reductive より $K \in \mathfrak{F}$ は reduce T であるから、$C = T^*T - TT^*$ を reduce する. 仮定から T, not normal 従って $C \neq 0$. 一方 $\boxed{\text{III}}$ より C は compact operator である. よって finite dimensional non-zero eigen-subspace E が存在する. 対応する orthogonal proj. P_E は reduced by $\forall K \in \mathfrak{F}$ 従って $\mathfrak{F}' = \{K \cap E : K \in \mathfrak{F}\}$ は same continuity properties as $\mathfrak{F}$ をもつ. これは E が finite dimensionality に矛盾.

Wermer's theorem を先に証明なしで挙げたが、次の定理の special case になっている. (証明は省略)

$\boxed{\text{X}}$ t : an element of a C^*-algebra とする. 次は同値である.

(1) t が normal で, $\sigma(T)$ が平面を分けないし、内点も持っていない.

(2) t^* が the limit in norm of a sequence of polynomials in t.

$\boxed{\text{XI}}$ N: normal, T: strongly reductive, $\sigma(N) \subset \sigma_e(T)$
$\Rightarrow$ N: reductive.

<u>Proof.</u> T, N 共に same Hilbert space H 上の operator としてよい. P を orthogonal projection on H s.t. $(1-P)NP=0$ とする. $PN-NP=0$ を示そう. H^∞: the orthogonal direct sum of copies of H, indexed by the non-negative integers. H^∞上の operators を次のように define. $S = T \oplus N \oplus N \oplus \cdots$, $P_1 = 0 \oplus P \oplus P \oplus \cdots$, $P_2 = 0 \oplus 0 \oplus P \oplus P \oplus \cdots$, $P_3 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus P \oplus P \oplus \cdots$, and so on. left spectrum の characterization 及び $\boxed{\text{III}}$, $\boxed{\text{IV}}$ より, T は "strongly normal on $\sigma_e(T)$" in the sense of Stampfli [St: 2] i.e. for $\forall \lambda \in \sigma_e(T)$, $\exists$ orthonormal sequence of vectors $\{\varphi_n\}$ s.t. $\|(T-\lambda)\varphi_n\| \to 0$ and $\|(T^*-\bar{\lambda})\varphi_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$ である. 従って Stampfli の定理 [St: 2] より $\exists$ isometric isomorphism $W: H \to H^\infty$, $\exists$ compact operator K on H^∞ s.t. $WTW^{-1} = S + K$.
T: strongly reductive より $S+K$ も strongly reductive となり、 $\|(1-P_n)(S+K)P_n\| \leq \|(1-P_n)SP_n\| + \|(1-P_n)KP_n\| = \|(1-P)NP\| + \|(1-P_n)KP_n\| \leq \|KP_n\|$ ところで $P_n \to 0$ strongly as $n \to \infty$, K: compact であるから $\|KP_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$.
従って $\|(1-P_n)(S+K)P_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$, strong reductivity より $\|P_n(S+K) - (S+K)P_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$ ところで,

$\| P_n(S+K) - (S+K)P_n \| \geqq \| P_nS - SP_n \| - \| P_nK \| - \| KP_n \| =$
$\| PN - NP \| - \| P_nK \| - \| KP_n \|$. 先に示したように $\| P_nK \| \to 0$
及び $\| KP_n \| \to 0$ $(n \to \infty)$ ゆえに $PN - NP = 0$.

$\boxed{\mathrm{XII}}$ X : compact set in the plane which either divides the plane or has interior $\Rightarrow$ $\exists$ normal operator N which is not reductive and $\sigma(N) \subset X$.

Proof. $\hat{X}$: the union of X and all bounded components of the complement of X. $\hat{X}$ は compact で、interior を持つ.
G : a component of the interior of $\hat{X}$, $\lambda \in G$ とする.
m : the harmonic measure on $\hat{X}$ evaluated at λ [C: p77].
とする. m は probability measure で、その support, supp m, は G の boundary, ∂G, で、the unique representing measure for the complex homomorphism "evaluation at λ" on the Dirichlet algebra $R(\hat{X})$ [G: Chap. II] (ここで $R(\hat{X})$ は the closure in $C(\hat{X})$ of the set of all rational functions with poles off $\hat{X}$). 即ち for any function $f \in R(\hat{X})$,
$f(\lambda) = \int f(z)\, dm(z)$. ここで N を the normal operator of multiplication by z on the Hilbert space $L^2(m)$ とする.
$\sigma(N) = \mathrm{supp}\, m = \partial G \subset \partial \hat{X} \subset \partial X \subset X$. 今 $H^2(m)$ を the closure in $L^2(m)$ of the set of polynomials とすると、
$H^2(m)$ は invariant under N で、constant function $1 \in H^2(m)$,

及び $((N^*-\bar{\lambda})1)(z) = \bar{z}-\bar{\lambda}$ である。更に $\|\bar{z}-\bar{\lambda}\|^2 = \int|z-\lambda|^2 dm(z) \geq \mathrm{dist}(\lambda, \partial G)^2 > 0$ 従って $H^2(m)$ は N を reduce しない。ゆえに N は not reductive である。

$\boxed{\text{XIII}}$ T: strongly reductive $\Rightarrow$ $\sigma(T)$: neither divides the plane nor has interior.

<u>Proof.</u> $\boxed{\text{V}}$ より $\sigma_e(T)$ neither divides the plane nor has interior をいえばよい。これは $\boxed{\text{XI}}$, $\boxed{\text{XII}}$ より従う。

$\boxed{\text{XIV}}$ T: normal operator とするとき、次は同値である。

(1) T: strongly reductive.

(2) $\sigma(T)$: neither divides the plane nor has interior.

(3) T^*: the uniform limit of a sequence of polynomials in T.

<u>Proof.</u> $\boxed{\text{XIII}}$ より、(1) $\Rightarrow$ (2), Strong reductive operator の性質 5. より、(2) $\Rightarrow$ (1), $\boxed{\text{X}}$ より、(2) $\Leftrightarrow$ (3).

次に algebra の strong reductivity について若干述べておくことにする。

$\boxed{\text{DEFINITION}}$ [AFV:3] algebr $\mathfrak{A}$ of operators on H が strongly reductive である。$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}^* = \{T^* : T \in \mathfrak{A}\} \subset \mathrm{Appr\cdot Alg}\,[\mathrm{Appr\cdot Lat}(\mathfrak{A})]$ ここで for a set $\mathfrak{A} \subset B(H)$,

Appr・Lat$(\mathfrak{A})$: the family of all sequences $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of orthogonal projections on H s.t. $\|(1-P_n)TP_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$ for $\forall T \in \mathfrak{A}$. それから for a arbitrary family $\mathfrak{F}$ of sequences $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ of orthogonal projections on H,

Appr・Alg$(\mathfrak{F})$: the set of all $T \in B(H)$ s.t. $\|(1-P_n)TP_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$ for all $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{F}$. この表現を用いると T が strongly reductive である $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{A}_T = \{p(T) : p = \text{polynomial}\}$ が strongly reductive algebra である. ということになる. 先に示したように, strongly reductive operator は normal であるから $\boxed{\text{XIV}}$ より、次が成り立つ.

$\boxed{\text{XV}}$ T: strongly reductive $\Rightarrow$ the norm-closure $\overline{\mathfrak{A}_T}$ of $\mathfrak{A}_T$ in $B(H)$ is already the C^*-algebra generated by T and 1.

これはもっと一般化できる。(証明なしで挙げておく).

$\boxed{\text{THEOREM}}$ [AFV:3] $\mathfrak{A} \subset B(H)$ を a norm separable strongly reductive commutative algebra containing 1 $(=1_H)$ $\Rightarrow$ the norm-closure $\overline{\mathfrak{A}}$ of $\mathfrak{A}$ = the C^*-algebra generated by $\mathfrak{A}$.

参考文献

[A] C. Apostol, Sur la partie normale d'un ensemble d'operateurs de l'espace de Hilbert, Acta Math. Hungar., 17(1966), 1-4.

[AF] C. Apostol and C.-K. Fong, Invariant subspaces for algebras generated by strongly reductive operators, Duke Math. J., 42(1975), 495-498.

[AFV:1] C. Apostol, C. Foias and D. Voiculescu, Some results on non-quasitriangular operators, IV, Rev. Roum. Math. Pure. Appl., 18(1973), 487-514.

[AFV:2] C. Apostol, C. Foias and D. Voiculescu, Strongly reductive operators are normal, Acta Sci. Math. (Szeged), 38(1976), 261-263.

[AFV:3] C. Apostol, C. Foias and D. Voiculescu, On strongly reductive algebras, Rev. Roum. Math. Pure. Appl., 21 (1976), 633-641.

[C] G. Choquet, Lectures in Analysis, III, Benjamin, New York, 1969.

[CF] I. Colojoara and C. Foias, Theory of generalized spectral operators, Gordon and Breach, New York, 1968.

[DP] R. G. Douglas and C. Pearcy, A note on quasitriangular operators, Duke Math. J., 37(1970), 177-188.

[DPP] J. A. Dyer, E. A. Pederson and P. Porcelli, An equivalent formulation of the invariant subspace conjecture, Bull. Amer. Math. Soc., 78(1972), 1020-1023.

[FSP] P. A. Fillmore, J. G. Stampfli and J. P. Williams, On the essential numerical range , the essential spectrum, and a problem of Halmos, Acta Sci. Math. (Szeged), 33 (1972), 179-192.

[G] T. W. Gamelin, Uniform algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.

[Hal:1] P. R. Halmos, A Hilbert space problem book, van Nostrand, Princeton, 1967.

[Hal:2] P. R. Halmos, Capacity in Banach algebras, Indiana Univ. Math. J., 20(1971), 855-863.

[Har] K. J. Harrison, Strongly reductive operators, Acta Sci. Math. (Szeged), 37(1975), 205-212.

[S:1] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pacific J. Math., 17(1966), 511-517.

[S:2] D. Sarason, Weak star density of polynomials, J. reine angew. Math., 252(1972), 1-15.

[St:1] J. G. Stampfli, Hyponormal operators, Pacific J. Math., 12(1962), 1453-1458.

[St:2] J. G. Stampfli, Compact perturbations, normal eigen-values, and a problem of Salinas,

[W] J. Wermer, On invariant subspaces of normal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 3(1952), 270-277.

[V] D. Voiculescu, A non-commutative Weyl-von Neumann theorem, Rev. Roum. Math. Pure. Appl., 21(1976), 97-113.