数理解析研究所講究録
第 403 巻 1980 年 70-87

合成写像の安定性

千葉大 理　　中居 功

Single mapping の安定性，普遍開折，分類の理論は，H. Whitney，R. Thom，J. Mather 等により発展した。以下ではこれらの理論が smooth mapping の diagram に対して どのように展開されるかを示す。

H. Whitney は [7] の中で generic な $(R^2, 0)$ から $(R^2, 0)$ への mapping は fold と cusp しかないことを示した。更に R. Thom は 横断性の概念と Malgrange の割り算定理を用いて特異点の理論を展開した。これらの理論は，J. Mather の一連の論文によってまとめられている。要約すると，割り算定理 [M. I]，adequate homomorphism の理論 [M. II]，有限確定性 [M. III]，Contact class の導入 [M. IV]，Nice range の決定 [M IV] と言えるだろう。J. Mather は更に，H. Whitney，R. Thom による stratification の理論を使って，

Topological stability theorem を証明した［6］。

合成写像の特異点の問題は、F. Pham, R. Thom により、Landau の特異点に関する問題として提起された［5］。今我々は合成写像、更に一般に smooth mapping の diagram の分類、特異点の安定性に興味を持つ。この問題は非常に膨大であり すべてを含む一般的な理論は期待できない。例えば、次の図式は可微分写像を共役で分類する問題を表わす。

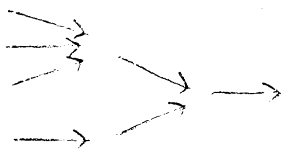
$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

また次の図式は submanifold の projection や、variety の projection の問題を含んでいる。（V.I. Arnol'd［1, 2］）

$$\begin{tikzcd} \circ & \circ \arrow[l] \arrow[r] & \circ \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \end{tikzcd}$$

合成写像の大域的な安定性（C^∞）を研究するために adequate homomorphism の理論が依然有効であることが J. Mather, N. Baas により示されているが、このことは F. Latour［8］の中にすでに見られる。合成写像の germ の安定性を研究する場合にも この方法を精密化することによって さまざまな定理を証明できる。以下に挙げる結果は すべて tree diagram にまで自然に一般化される。



p_i, $i=1,\cdots,k$ を正整数，$f_i, g_i \in \mathcal{E}(p_i, p_{i+1})$, $i=1,\cdots,k-1$ を C^∞ map-germ とする。以下，$\mathcal{E}(m,p)$ は C^∞ map-germ $f:(\mathbb{R}^m,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 全体を示し，$\mathcal{E}(n,1)$ を単に $\mathcal{E}(n)$ と書く。$f=\{f_i\}_{i=1}^{k-1}$, $g=\{g_i\}_{i=1}^{k-1}:(\mathbb{R}^{p_1},0)\to\cdots\to(\mathbb{R}^{p_k},0)$ に対し，$\mathrm{Hom}(f,g)$ とは，C^∞ map-germ の k-tuple $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_k)$, $\varphi_i\in\mathcal{E}(p_i,p_i)$, $i=1,\cdots,k$ で，$g_{i+1}\circ\varphi_i=\varphi_{i+1}\circ f_i$, $i=1,\cdots,k-1$ となるもの全体の集合のことをいう。$\varphi=\{\varphi_i\}_{i=1}^k\in\mathrm{Hom}(f,g)$ のとき $\varphi:f\to g$ と書く。$f, g, h:(\mathbb{R}^{p_1},0)\to\cdots\to(\mathbb{R}^{p_k},0)$，$\varphi=\{\varphi_i\}_{i=1}^k:f\to g$，$\psi=\{\psi_i\}_{i=1}^k:g\to h$ とすると φ と ψ の合成 $\psi\circ\varphi:f\to h$ は $\psi\circ\varphi=\{\psi_i\circ\varphi_i\}_{i=1}^k$ で定義される。$\varphi^{-1}\in\mathrm{Hom}(g,f)$ が存在し，$\varphi^{-1}\circ\varphi=1=\{id\,\mathbb{R}^{p_i}\}\in\mathrm{Hom}(f,f)$ となるとき f と g は同値であるという。

定義 $f=\{f_i\}_{i=1}^{k}:(\mathbb{R}^{p_1},0)\to\cdots\to(\mathbb{R}^{p_k},0)$ が C^∞-stable であるとは，f の任意の代表元 $\hat{f}=\{\hat{f}_i\}_{i=1}^{k-1}$，$\hat{f}_i:(U_i,0)\to(\mathbb{R}^{p_{i+1}},0)$，$U_i$ は $0\in\mathbb{R}^{p_i}$ の近傍，に対し次のことが成り立つことをいう。$C^\infty(U_1,\mathbb{R}^{p_2})\times\cdots\times C^\infty(U_{k-1},\mathbb{R}^{p_k})$ の weak C^∞-topology で $\hat{f}$ に十分近い $\hat{g}=\{\hat{g}_i\}_{i=1}^{k-1}$ に対し，$(x_1,\cdots,x_k)\in U_1\times\cdots\times U_{k-1}\times\mathbb{R}^{p_k}$ が存在し $\hat{g}:(U_1,x_1)\to\cdots\to(U_{k-1},x_{k-1})\to(\mathbb{R}^{p_k},x_k)$ となり，

x_i をそれぞれ $0 \in \mathbb{R}^{p_i}$ に平行移動する座標変換して得られる sequence $g = \hat{g}$ at $(x_1, \dots, x_k) : (\mathbb{R}^{p_1}, 0) \to \cdots \to (\mathbb{R}^{p_k}, 0)$ が f と同値になる。‖

$\theta(p_i) = \Gamma_c^\infty(T\mathbb{R}^{p_i})$, $\theta(f_i) = \Gamma_c^\infty(f_i^* T\mathbb{R}^{p_{i+1}})$ を C^∞-section の germ 全体のなす finite $\mathcal{E}(p_i)$-module とする。 $tf_i : \theta(p_i) \to \theta(f_i)$ を $tf_i(v_i) = df_i(v_i)$, $v_i \in \theta(p_i)$ によって、$\omega f_i : \theta(p_{i+1}) \to \theta(f_i)$ を $\omega f_i(v_{i+1}) = f^*(v_{i+1})$, $v_{i+1} \in \theta(p_{i+1})$ によって定義する。 $T(f) : \bigoplus_{i=1}^{k} \theta(p_i) \to \bigoplus_{i=1}^{k-1} \theta(f_i)$ を $T(f)(0 \oplus \cdots \oplus v_i \oplus \cdots \oplus 0) = (0 \oplus \cdots \oplus \omega f_{i-1}(v_i) \oplus tf_i(v_i) \oplus 0 \cdots \oplus 0)$, $v_i \in \theta(p_i)$ で定義する。

<u>定義</u> $f = \{f_i\}_{i=1}^{k-1} : (\mathbb{R}^{p_1}, 0) \to \cdots \to (\mathbb{R}^{p_k}, 0)$ が infinitesimally stable とは $T(f) : \bigoplus_{i=1}^{k} \theta(p_i) \to \bigoplus_{i=1}^{k-1} \theta(f_i)$ が全射になることをいう。

(注意) Infinitesimal stability は f の無限小の変化がすべて無限小座標変換で与えられることを示している。

Jet space, jet section を次のように定義する。
$J^\ell(\mathbb{R}^{p_1}, \dots, \mathbb{R}^{p_k}) = J^\ell(\mathbb{R}^{p_1}, \mathbb{R}^{p_2}) \times \cdots \times J^\ell(\mathbb{R}^{p_{k-1}}, \mathbb{R}^{p_k}) \times \mathbb{R}^{p_k}$、$J^\ell(p_1, \dots, p_k) = J^\ell(p_1, p_2) \times \cdots \times J^\ell(p_{k-1}, p_k)$ とする。 $J^\ell f : \mathbb{R}^{p_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{p_k} \to J^\ell(\mathbb{R}^{p_1}, \dots, \mathbb{R}^{p_k})$ を $J^\ell f(x_1, \dots, x_k) = (J^\ell f_1(x_1), \dots, J^\ell f_{k-1}(x_{k-1}), x_k)$, $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{p_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{p_k}$ で定義する。 $J^\ell(\mathbb{R}^{p_1}, \dots, \mathbb{R}^{p_k})$ を

$J^\ell(p_1,\dots,p_k)\times \mathbb{R}^{p_1}\times\mathbb{R}^{2p_2}\times\cdots\times\mathbb{R}^{2p_k}$ と同一視し、$\pi: J^\ell(\mathbb{R}^{p_1},\dots,\mathbb{R}^{p_k}) \longrightarrow \mathbb{R}^{p_1}\times\mathbb{R}^{2p_2}\times\cdots\times\mathbb{R}^{2p_k}$ を第2成分への射影とする。$\Delta_j = \{(x_1, x_2', x_2, \dots, x_{k-1}', x_{k-1}, x_k', x_k)\in \mathbb{R}^{p_1}\times\mathbb{R}^{2p_2}\times\cdots\times\mathbb{R}^{2p_k};\ x_i'=x_i,\ i=j+1,\dots,k\}$ とする。$z^\ell\in J^\ell(\mathbb{R}^{p_1},\dots,\mathbb{R}^{p_k})$ は $\pi^{-1}(\Delta_j)$ に含まれる時のみ合成写像 $f^j=\{f_i\}_{i=j}^{k-1}: (\mathbb{R}^{p_j},0)\to\cdots\to(\mathbb{R}^{p_k},0)$ を意味している。$f=\{f_i\}_{i=1}^{k-1}$ について考察する時、f の sub sequence についても同時に考えることになる。$L(p_i)\subset \mathcal{E}(p_i,p_i)$ を local diffeo. 全体のなす群、$L(p_j,\dots,p_k)=L(p_j)\times\cdots\times L(p_k)$ とする。$\phi=\{\phi_i\}_{i=j}^{k-1}\in L(p_j,\dots,p_k)$, $f=\{f_i\}_{i=j}^{k-1}$ に対し $\phi(f)=\{\phi_{i+1}\circ f_i\circ\phi_i^{-1}\}_{i=j}^{k-1}$ とすると、$L(p_j,\dots,p_k)$ は sequence 全体に群として作用し、lie 群 $L^\ell(p_j,\dots,p_k)$ の $J^\ell(p_j,\dots,p_k)$ への semi algebraic な作用を導く。f の $L(p_1,\dots,p_k)$ による orbit を $O(f)$、$J^\ell(p_1,\dots,p_k)$ への射影を $O^\ell(f)$ と書く。定理1によると、上に挙げた stability, infinitesimal stability、また十分大きな ℓ に対して $J^\ell f \pitchfork O^\ell(f)\times\Delta_1$、が同値になる。

$f, g: (\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ が ℓ-同値とは、pull-back $f^*, g^*: \mathcal{E}(p)\longrightarrow \mathcal{E}(n)/\mathfrak{m}(n)^{\ell+1}$ が algebra の homomorphism として同型になることをいう。f, g が contact 同値であるとは、$Q(f)=\mathcal{E}(n)/f^*\mathfrak{m}(p)\cdot\mathcal{E}(n)$, $Q(g)=\mathcal{E}(n)/g^*\mathfrak{m}(p)\cdot\mathcal{E}(n)$ が algebra として同型になることをいう。J. Mather (III, IV) により次のこと

が知られている。

(1) f が stable で f, g が p-同値 $\Rightarrow$ f, g は同値。

(2) f が stable で f, g が contact-同値 $\Rightarrow$ f, g は同値。

これらは、合成写像に対して、ある種の determinacy として一般化される。 $a_i \in \{0, 1, \cdots, \infty, *\}$, $i = 1, \cdots, K$, $I = (a_1, \cdots, a_K)$, $I+1 = (a_1+1, \cdots, a_K+1)$ とする。但し $\infty+1=\infty$, $*+1 = *$。 $f^* m^{I+1} \cdot \mathcal{E}(P_i) = (m(P_i)^{a_i+1} + \cdots + (f_{K-1} \circ \cdots \circ f_i)^* m(P_K)^{a_K+1}) \cdot \mathcal{E}(P_i)$, $i = 1, \cdots, K$ とする。但し $m(P_i)^* = 0$。 $Q_I^*(f) : \mathcal{E}(P_1)/f^* m^{I+1} \cdot \mathcal{E}(P_1) \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{E}(P_K)/f^* m^{I+1} \cdot \mathcal{E}(P_K)$ を f^* から導かれるもの、また g に対しても $Q_I^*(g)$ を同様に定義する。

定義 f, g が I-同値とは、 $Q_I^*(f)$, $Q_I^*(g)$ が algebra の homomorphism の sequence として同型になることをいう。

今、上の (1) (2) は この定義でいうと次のようになる。

(3) f が stable で f, g が $(p, 0)$-同値 $\Rightarrow$ f, g は同値 或いは $(*, *)$-同値。 f の I-同値類を $O_I(f)$、それの $J^\ell(P_1, \cdots, P_K)$ への射影を $O_I^\ell(f)$ と書く。

命題 $O_I^\ell(f)$ は $J^\ell(P_1, \cdots, P_K)$ の中の smooth submanifold をなす。但し $I = (a_1, \cdots, a_K)$、$a_i \neq 0$、$i = 1, \cdots, K$。

定義　$f=\{f_i\}_{i=1}^{k-1}:(\mathbb{R}^{p_1},0)\to\cdots\to(\mathbb{R}^{p_k},0)$ が I-transversal とは $\forall\ell$ に対し $J^{\ell}f \pitchfork \mathcal{O}_I^{\ell}(f)\times\Delta_1$ となることをいう。（ $a_i=0$ に対しては、上の transversality は意味を持たないが、代数的に定義される [4]。）

$f=\{f_i\}_{i=1}^{k-1}:(\mathbb{R}^{p_1},0)\to\cdots\to(\mathbb{R}^{p_k},0)$ に対し、$e_I(f)=(e_I^1(f),\cdots,e_I^k(f))$ を $e_I^{i-1}(f)=\dim_R \theta(p_i)/f^*m^{I+i}\cdot\theta(p_i)+e_I^i(f)$ で定義する。$e(f)=(e^1(f),\cdots,e^k(f))\in Z^k$ を $e_{e(f)}=e(f)$, $e^k(f)=0$ となる唯一の k-tuple とする。明らかに f, g が $e(f)$-同値ならば $e(f)=e(g)$ となる。

さて我々の定理は次のものである。

定理1　次の条件は同値。

(a)　f は stable

(b)　f は infinitesimally stable

(c)　f は $(*,\cdots,*)$-transversal

(d)　f は $e(f)$-transversal

(d)′　$J^{e^1(f)}f \pitchfork \mathcal{O}_{e(f)}^{e^1(f)}(f)\times\Delta_1$

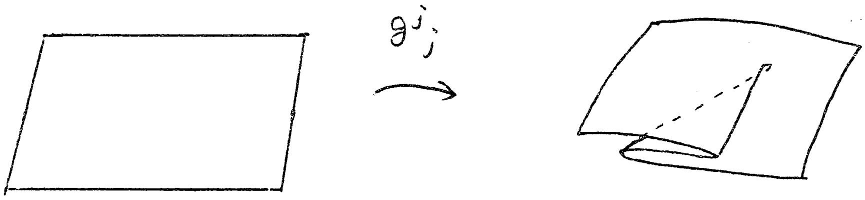
定理2　$f=\{f_i\}_{i=1}^{k-1}$ が stable ならば、f は $e(f)+1$ determined；　f, g が $e(f)+1$-同値ならば f, g は同値。

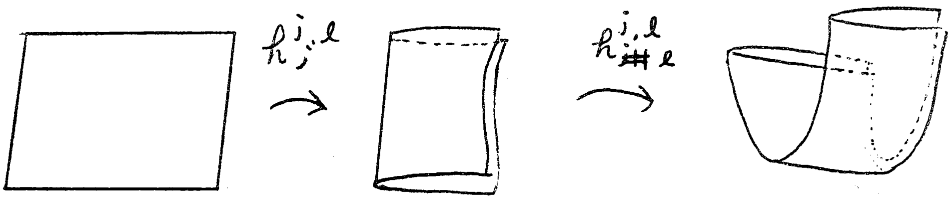
注意　定理2は P.6 (3) の拡張になっている。 e(f)-determinacy が証明されるべきだが、まだなされていない。

定理3　$f=\{f_i\}_{i=1}^{k-1}:(\mathbb{R}^2,0)\to\cdots\to(\mathbb{R}^2,0)$ で stable なものは 次のいずれかに同値，

(1) $g^{j}=\{g^j_i\}_{i=1}^{k-1}$ (Cusp)
$$\begin{cases} g^j_i=id., & i=1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,k-1 \\ g^j_j(x,y)=(x^3+xy,\ y) & \end{cases}$$

(2) $h^{j,l}=\{h^j_i\}_{i=1}^{k-1}$ (fold)
$$\begin{cases} h^j_i=id., & i=1,\cdots,j-1,j+2,\check{l},k-1 \\ h^{j,l}_j(x,y)=(x^2,\ y) & \\ h^{j,l}_l(x,y)=(x-y,\ y^2) & \end{cases}$$





証明は Whitney の写像と 定理1 から従う。

合成写像の Topological stability theorem（定理　）の証明は　おおそ二つの理論によっている。一つは map-germ の sequence の stability, unfolding の理論．もう一つは R. Thom. H. Whitney による Second isotopy lemma である。後者は stratified sequence の局所自明性を主張するもので，可微分写像の sequence の族の位相的自明性を示すのに使われる。前者は可微分写像の sequence の stratification をある意味で Canonical に与えるのに使われる。

$F\{F_i\}_{i=1}^{k-1} : (\mathbb{R}^{p_1+r}, 0) \to \cdots \to (\mathbb{R}^{p_k+r}, 0)$，$i : (\mathbb{R}^{p_k}, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{p_k+r}, 0)$ を埋込みとする。$i \pitchfork (F_{k-1} \circ \cdots \circ F_1)$ ならば　次々に fiber square をとることにより　i で lift した smooth map-germ の sequence f が定義される。

$$\begin{tikzcd}
f : (\mathbb{R}^{p_1}, 0) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (\mathbb{R}^{p_2}, 0) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r] & (\mathbb{R}^{p_{k-1}}, 0) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (\mathbb{R}^{p_k}, 0) \arrow[d, hook] \\
F : (\mathbb{R}^{p_1+r}, 0) \arrow[r] & (\mathbb{R}^{p_2+r}, 0) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (\mathbb{R}^{p_{k-1}+r}, 0) \arrow[r] & (\mathbb{R}^{p_k+r}, 0)
\end{tikzcd}$$

このとき　$i : f \xrightarrow{\pitchfork} F$　と書き　F を f の unfolding という。　F は適当な座標変換により　$F_i(x_i, u_i) = (\tilde{f}_i(x_i, u_i), u_i)$，$\tilde{f}_i(x_i, 0) = f_i(x_i)$，$x_i \in \mathbb{R}^{p_i}$，$u_i \in \mathbb{R}^r$　の型になることがわかる。　以下すべてこの型のものとする。　F, G をそれぞれ　r, s 次元の f の unfolding とする。　$\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{k}$: $F \to G$　が f の unfolding の morphism であるとは　次の

図式が可換になることをいう。

$$\begin{tikzcd} i : f \arrow[r, hook, "\Phi"] \arrow[dr, hook, "\Phi'"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

定義　f の任意の unfolding G に対して、unfolding の morphism $\varphi : G \longrightarrow F$ があるとき F を f の versal unfolding という。（一般に F, G のパラメータの次元は違う。）

$F = \{F_i\}_{i=1}^{k-1}$, $F_i(x_i, u_i) = (\hat{f}_i(x_i, u_i), u_i)$, $(x_i, u_i) \in \mathbb{R}^{p_i + r}$.
$\hat{f}_i(x_i, 0) = f_i(x_i)$ を $f = \{f_i\}$ の unfolding とする。
$f_u = \{f_{u,i}\}_{i=1}^{k-1}$, $f_{u,i}(x_i) = \hat{f}_i(x_i, u)$, $x_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ と定義し sequence の族とみなす。

定義　f の unfolding F が I-transversal とは、Jet section の族 $J^\ell \hat{f} : \mathbb{R}^{p_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{p_k} \times \mathbb{R}^r \longrightarrow J^\ell(\mathbb{R}^{p_1}, \cdots, \mathbb{R}^{p_k})$,
$J^\ell \hat{f}(x_1, \cdots, x_k, u) = J^\ell f_u(x_1, \cdots, x_k)$ が任意の ℓ に対して $O^\ell_I(f) \times \Delta_1$ に横断的に交わることをいう。

定理4　F を f の unfolding とする。このとき、次の条件はすべて同値。

(1) F は stable

(2) F は versal

(3) F は I-transversal, $I=(*,\cdots,*,0)$。但し、I-同値類は多様体であることが証明されていないので代数的に定義を与える。詳しくは [4]。

定理5 $J^\infty(p_1,\cdots,p_k)$, $p_i<p_j$, $i<j$ の中に projective semialgebraic set Σ, $\mathrm{Codim}\,\Sigma=\infty$ が存在し、$J^\infty-\Sigma\ni z$ ならば z は stable unfolding を持つ。

定理6 $f=\{f_i\}_{i=1}^{k-1}$ を map-germ の sequence とする。次の条件は同値。

(1) f は stable unfolding を持つ。

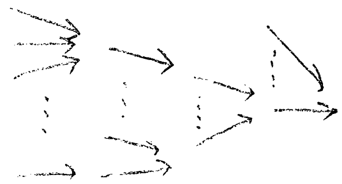
(2) f は I-transversal unfolding を持つ。ここで $I=(*,\cdots,*,a_k)$. a_k

定理7 $I=(*,\cdots,*,a_k)$, $a_k>0$ とする。f の I-transversal unfolding は unfolding として一意に定まる。すなわち、F, G を f の r 次元の I-transversal unfolding とすると、unfolding の isomorphism $\theta=\{\theta_i\}_{i=1}^{k}$ が存在し、次の図式が可換になる。

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, hook, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

また、s次元$(s>r)$の I-transversal unfolding Hは、Fの自明な拡張と同値になる。

上の定理等により $J^n-\Sigma$ の元は唯一の stable (I-transversal) unfolding を持つ。これらの定理はそのまま次の図式の場合にまで拡張することができる。



Gを有向グラフ、Vをその頂点の集合、Lを辺の集合とする。$\alpha(\ell)$で $\ell\in L$ の始点を $\omega(\ell)$で終点を表わす。
また各頂点 $v\in V$ に多様体 M_v が与えられているものとする。
$v\in V$で、$\forall \ell\in L$ に対し $\alpha(\ell)\neq v$ となるものの集合を V_ω と書く。合成写像のときと同様に
$J(G)=\prod_{\ell\in L} J(M_{\alpha(\ell)}, M_{\omega(\ell)})\times\prod_{v\in V_\omega} M_v$ とする。各 $\ell\in L$ に対し、可微分写像 $f_\ell: M_{\alpha(\ell)}\to M_{\omega(\ell)}$ が与えられているとき $f=\{f_\ell\}_{\ell\in L}$ を G 上の可微分写像という。

$Jf : \prod_{v\in V} M_v \longrightarrow J(G)$ を $Jf(\{x_v\}_{v\in V}) = (\{Jf_\ell(x_{\alpha(\ell)})\}_{\ell\in L}, \{x_v\}_{v\in V_\omega})$ で定義する。 $\pi : J(G) \longrightarrow \prod_{\ell\in L}(M_{\alpha(\ell)}\times M_{\omega(\ell)}) \times \prod_{v\in V_\omega} M_v$ を自然な射影とする。このJetに対してThomの横断性定理が成り立つのは明らかである。

今、合成写像 $f=\{f_i\} : M_1^{m_1}\to\cdots\to M_k^{m_k}$ の位相安定性について考える。このとき我々はグラフ $M_1\to\cdots\to M_k$ の $\prod_{i=1}(m_i+1)$ 個のコピーについて考える。

$$G \qquad \left.\begin{array}{cccc} \longrightarrow & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \longrightarrow & & \longrightarrow \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \longrightarrow & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow \end{array}\right\} \prod_{i=1}(m_i+1)$$

$$\pi : J(G) \longrightarrow \prod_{\ell\in L}(M_{\alpha(\ell)}\times M_{\omega(\ell)})\times\prod_{v\in V_\omega} M_v$$
$$= (M_1\times M_2^2\times\cdots\times M_k^2)^{\prod_{i=1}(m_i+1)}$$

を自然な射影とする。 $\Gamma = (\{x_j^i\}_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,\prod(m_i+1)}}, \{\tilde{x}_j^i\}_{\substack{i=2,\dots,k\\ j=1,\dots,\prod(m_i+1)}})$
$\in (M_1\times M_2^2\times\cdots\times M_k^2)^{\prod_{i=1}(m_i+1)}$

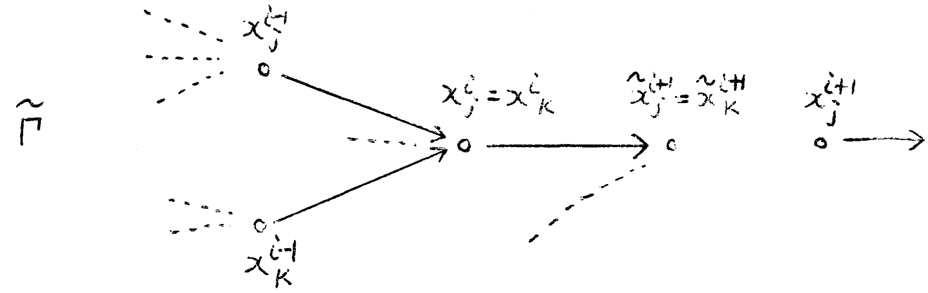
$$\Gamma \qquad \begin{array}{ccccc} x_1^1\to\tilde{x}_1^2 & x_1^2\to\tilde{x}_1^3 & \cdots & x_1^{k-1}\to\tilde{x}_1^k & x_1^k \\ x_2^1\to\tilde{x}_2^2 & x_2^3\to\tilde{x}_2^3 & & x_2^{k-1}\to x_2^k & x_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{\pi()}^1\to\tilde{x}_{\pi()}^2 & x_{\pi()}^3\to x_{\pi()}^3 & & x_{\pi()}^{k-1}\to\tilde{x}_{\pi()}^k & x^k \end{array}$$

Γ は次の条件を満たしているとする。

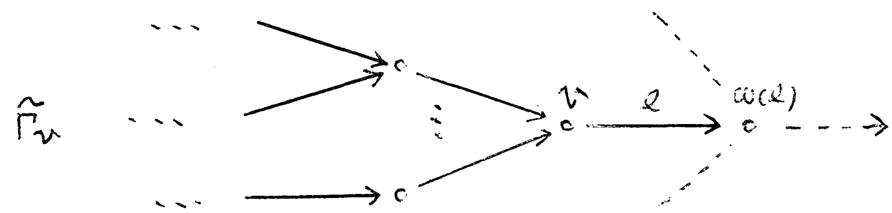
(1) $x^i_j = x^i_k \Rightarrow \tilde{x}^{i+1}_j = \tilde{x}^{i+1}_k$

(2) $\tilde{x}^i_j = x^i_j$ 、 $\tilde{x}^i_j = \tilde{x}^i_k \Rightarrow \tilde{x}^i_k = x^i_k$

このとき、図式 Γ において 等号が成り立つ頂点を同一視すると 次のような樹木ができる



これを $\hat{\Gamma}$ と書く。（一般に連結にはならない。） 同じ樹木 $\hat{\Gamma}$ を表わす Γ 全体を $\Delta_{\hat{\Gamma}}$ と書く。 $V_{\hat{\Gamma}}$ を $\hat{\Gamma}$ の頂点全体の集合とする。 $v \in V_{\hat{\Gamma}}$ に対し $\hat{\Gamma}_v$ を v に流れこむ頂点と辺、$\alpha(\ell) = v$ となる辺、$\omega(\ell)$ とから成り立つ樹木と定義する。



$z \in \pi^{-1}(\Gamma)$ は $\hat{\Gamma}_v$ 上の可微分写像（germ）としての stable unfolding F_z を持つとしてよい（定理 5、6、7）、（$m_i < m_j$, $i < j$ ）。 F_z の Thom stratification の頂点 v の原点を含む stratum の余次元を $C_v(z)$ と書く。

′ 我々の考えているJet space $J(G)$ を 自然数の tuple $\{C_v(z)\}_{v\in V_\Gamma}$, $\pi(z)\in\Delta_\Gamma$ と Γ によって分割を与え、更に細分すると $J(G)$ の Whitney stratification になる。これを $\mathcal{S}_G$ と書こう。

定義　$f=\{f_i\}_{i=1}^{k-1}: M_1\to\cdots\to M_k$ が C^0-stable とは、$\prod C^\infty(M_i, M_{i+1})$ の中で f に十分近い $g=\{g_i\}_{i=1}^{k-1}$ が f と C^0-同値；位相同型 $h_i: M_i\to M_i$, $i=1,\cdots,k$ が存在して $h_{i+1}\circ f_i = g_i\circ h_i$, $i=1,\cdots,k-1$；となることをいう。

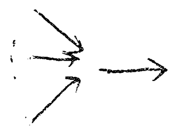
定理8　$M_i^{m_i}$, $i=1,\cdots,k$ を compact 多様体で、$i<j$ のとき $m_i<m_j$ とする。$f\in\prod_{i=1}^{k-1} C^\infty(M_i, M_{i+1})$ は、$J^\ell(f^{\pi(m_i+1)})$ が十分大きな ℓ に対し $\mathcal{S}_G$ に横断的に交わるならば C^0-stable。

定理9　定理8の仮定のもとで、C^0-stable な合成写像は $\prod_{i=1}^{k-1} C^\infty(M_i, M_{i+1})$ の中で open dense な部分集合をなす。

注意 (1)　定理5の仮定；$i<j$, $p_i<p_j$；が除去されれば、以下の定理はすべて一般に成り立つ。

(2)　A.D.E. 以外の図式において、C^∞-map-germ の第一近似（線型写像）の分類ですでに moduli が現われることが示されている［ヌ］。

(3)　Landau 特異点の分類は 次の図式の問題に含まれる。



安定な Landau 特異点は、定理 1～7 で分類できる。

[1] V. I. Arnol'd, Wave Front Evolution and Equivariant Morse Lemma, Communications on pure and applied Mathematics, XXIX, 1976, pp. 557-582.

———, Indices of Singular Points of 1-Forms on a Manifold With Boundary, Convolution of Invariants of Reflection Groups and Singular Projections of Smooth Surfaces, Russian Math Surveys, 34:2 (1979) 1-42

[2] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand and V. A. Panomarv, Coxeter Functors and Gabriel's Theorem. Russian. Math. Survay 28, (1973) 17-32.

[3] J. N. Mather, I ~ VI

[4] I. Nakai, Structural Stability of Composed Mappings, I (preprint), II (in preparation)

[5] F. Pham, Singularités des processus de diffusion multiple. Ann. Inst. Henri Poincaré, VI n° 2, 1967 89-204. (section A).

[6] J. N. Mather, Stratifications and Mappings in Dynamical systems ed. M. Peixoto 1973

[7] H. Whitney, On Singularities of Mappings of Euclidean space I. Ann. of Math 62. 3 1955, 374-410.

[8] F. Latour, Stabilité des champs d'applications differentiables, C. R. Acad. Sc. Paris t. 268 (2-1969) Série A - 1331.