数理解析研究所講究録
第 404 巻 1980 年 58-70

強さ5のB-arrayから得られる3^m-BFF designにおける3因子交互作用との別名関係について

海上保安大学校　来田 正秀

§1. 序.

3^m一部実施要因計画(3^m-FFD)において，Srivastava & Chopra[13]は分解能Vの釣合い型(2,0)対称計画の共分散行列のトレースを求めた。彼らの結果の特別な場合として，Hoke[4,5]は2次模型に基く計画についての色々な結果を与えている。三角型多次元部分釣合い(TMDPB)アソシエーションスキームの条件を緩和した多次元関係とその行列環の性質を用いて，Kuwada[6,7,9]は強さ4の均斉配列と分解能Vの釣合い型3^m一部実施要因計画(3^m-BFFD)の関係，分解能Vの3^m-BFFDの情報行列の固有多項式，そして与えられた処理組合せ数Nと因子数m(=4,5)について，tr-基準とdet-基準に関する最適計画をもとめた。また釣合い型3次模型でのtr-とdet-基準に関する最適計画，分解能IVの3^m-BFFDのGT-基準(Shirakura[10])に関する最適計画もお

めている([6, 8])。

ここでは強さ5の均斉配列から得られる計画について，Hedayat, Raktoe & Federer [3] によって導入された別名行列のノルムについて考える。一般の $s_1 \times s_2 \times \cdots \times s_m$ − FFD，また分解能 $2l+1$ の 3^m − BFFD の場合についての研究は Shirakura [11, 12] によってなされている。

§2. 線形模型と均斉配列

$(j_1, j_2, \cdots, j_m)$ をある処理組合せ（ただし j_k $(k=1, 2, \cdots, m)$ は k 番目の因子の水準を示し，0, 1, 2 のいずれかをとる）とし，T を N 個の処理組合せをもつ分解能 V の 3^m − FFD とする。このときつぎのような T に基く線形模型を考える：

(2.1) $\quad \mathcal{E}[\underline{y}(T)] = E_T \underline{\theta}$ 。

ただし $\underline{y}(T)$ は T に基く $N \times 1$ の観測値ベクトルで $\mathrm{Var}[\underline{y}(T)] = \sigma^2 I_N$，$E_T$ は $N \times \nu$ の計画行列，そして $\underline{\theta}' = (\{\theta(\phi)\}; \{\theta(t^1)\}; \{\theta(t^2)\}; \{\theta(t_1^1 t_2^1)\}; \{\theta(t_1^2 t_2^2)\}; \{\theta(t_3^1 t_4^2)\})$ である。ここで I_p は $p \times p$ の単位行列，$\nu (= 1 + 2m^2)$ は未知の要因効果の個数，そして $t_1 < t_2$，$t_3 \neq t_4$ である。模型 (2.1) の下で $\underline{\theta}$ の BLUE は

(2.2) $\quad \hat{\underline{\theta}} = M_T^{-1} E_T' \underline{y}(T)$，

で与えられる。ただし $M_T (= E_T' E_T)$ は $\nu \times \nu$ の情報行列である。

<u>定義2.1.</u>　$\hat{\theta}$の共分散行列$\mathrm{Var}[\hat{\theta}]=\sigma^2 M_T^{-1}$がm個の因子の置換に関して不変であるとき，Tは分解能Vの3^m－BFFDと呼ばれる。

<u>定義2.2.</u>　要素0, 1, 2をもつ$N\times m$の行列Tの任意の$k_1, k_2, \cdots, k_t$列からなるすべてのN×tの部分行列$T_{k_1k_2\cdots k_t}$において，$w_r(d_{k_1}, d_{k_2}, \cdots, d_{k_t})=i_r$ ($r=0, 1, 2$)である$1\times t$のベクトルが$T_{k_1k_2\cdots k_t}$の行として各々$\lambda_{i_0i_1i_2}$回づつ現われるとき，Tは強さt，大きさN，制約数m，3水準，指標集合$\{\lambda_{i_0i_1i_2} \mid i_0+i_1+i_2=t,\ i_0, i_1, i_2\geqq 0\}$をもつ均斉配列（簡単に$BA[N, m, 3, t]\{\lambda_{i_0i_1i_2}\}$と記す）と呼ばれる。ただし$w_r(d_1, d_2, \cdots, d_k)$はベクトル$(d_1, d_2, \cdots, d_k)$におけるrの個数を示す。

この均斉配列の概念はChakravarti [2] によって導入された。

<u>定理2.1.</u>　情報行列M_Tが正則である仮定の下で，Tが分解能Vの3^m－BFFDであることと，Tが$BA[N, m, 3, 4]\{\lambda_{i_0i_1i_2} \mid i_0+i_1+i_2=4\}$であることとは同値である。

Tを$BA[N, m, 3, t]\{\lambda_{i_0i_1i_2}\}$とするとき，$M_T$の要素は$\gamma_{p_0p_1p_2}$ $(p_0+p_1+p_2=t,\ p_0, p_1, p_2\geqq 0)$の一次結合で与えられる。ただし

(2.3)
$$\gamma_{p_0p_1p_2}=\sum\{p_0!/(i_0^0!\,i_1^0!\,i_2^0!)\}\{p_1!/(i_0^1!\,i_1^1!\,i_2^1!)\}\{p_2!/(i_0^2!\,i_1^2!\,i_2^2!)\}\cdot(-1)^{i_0^1}\delta_{0i_1^1}(-2)^{i_1^2}\lambda_{i_0^0+i_0^1+i_0^2\ \ i_1^0+i_1^1+i_1^2\ \ i_2^0+i_2^1+i_2^2}$$

である。ここでδ_{ij}はKronecker's symbolである。

§3. 多次元関係とその行列環.

Bose & Srivastava[1]によって導入されたMDPBアソシエーションスキームの3つの条件の内，対称性の条件を緩和した多次元関係を要因効果の間につぎのように定義する：

定義3.1. 2つの要因効果 $\theta(t^1_1\cdots t^1_{a_1} t^2_1\cdots t^2_{a_2})$ と $\theta(u^1_1\cdots u^1_{b_1} u^2_1\cdots u^2_{b_2})$ に対して，多次元関係の指標 α_{ij} $(i,j=1,2)$ が

$$
(3.1)\begin{cases}
\left|\{t_1,\cdots,t_{a_1}\}\cap\{u_1,\cdots,u_{b_1}\}\right| = \min(a_1,b_1)-\alpha_{11}, \\
\left|\{t_1,\cdots,t_{a_1}\}\cap\{u'_1,\cdots,u'_{b_2}\}\right| = \min(a_1,b_2)-\alpha_{12}, \\
\left|\{t'_1,\cdots,t'_{a_2}\}\cap\{u_1,\cdots,u_{b_1}\}\right| = \min(a_2,b_1)-\alpha_{21}, \\
\left|\{t'_1,\cdots,t'_{a_2}\}\cap\{u'_1,\cdots,u'_{b_2}\}\right| = \min(a_2,b_2)-\alpha_{22}
\end{cases}
$$

を満たすとき，$\theta(t^1_1\cdots t^1_{a_1} t^2_1\cdots t^2_{a_2})$ は $\theta(u^1_1\cdots u^1_{b_1} u^2_1\cdots u^2_{b_2})$ と $R(\underline{\alpha}; a_1a_2, b_1b_2)$ の関係にあると呼ばれる（簡単に $\theta(t^1_1\cdots t^1_{a_1} t^2_1\cdots t^2_{a_2}) \xrightarrow{R(\underline{\alpha};\, a_1a_2,\, b_1b_2)} \theta(u^1_1\cdots u^1_{b_1} u^2_1\cdots u^2_{b_2})$ と記す）．ただし $\underline{\alpha}=(\alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \alpha_{21}\ \alpha_{22})$ である。

[注]. $\theta(t^1_1\cdots t^1_{a_1} t^2_1\cdots t^2_{a_2}) \xrightarrow{R(\underline{\alpha};\, a_1a_2,\, b_1b_2)} \theta(u^1_1\cdots u^1_{b_1} u^2_1\cdots u^2_{b_2})$ であるとき，$\theta(u^1_1\cdots u^1_{b_1} u^2_1\cdots u^2_{b_2}) \xrightarrow{R(\underline{\tilde\alpha};\, a_1a_2,\, b_1b_2)} \theta(t^1_1\cdots t^1_{a_1} t^2_1\cdots t^2_{a_2})$ である。ただし $\underline{\tilde\alpha}=(\alpha_{11}\ \alpha_{21}\ \alpha_{12}\ \alpha_{22})$ である．また $\theta(t^{\varepsilon_1}_1\cdots t^{\varepsilon_1}_a)$ と $\theta(u^{\varepsilon_2}_1\cdots u^{\varepsilon_2}_b)$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2=1,2)$ の間に定義される多次元関係はTMDPBアソシエーションスキームと同等になる．

$\{\theta(t^1_1\cdots t^1_{a_1} t^2_1\cdots t^2_{a_1})\}$ と $\{\theta(u^1_1\cdots u^1_{b_1} u^2_1\cdots u^2_{b_2})\}$ の集合の間に定義される多次元関係を示す行列 $A_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,b_1b_2)} = \left\| a(t^1_1\cdots t^1_{a_1} t^2_1\cdots t^2_{a_2}\,;\, u^1_1\cdots u^1_{b_1} u^2_1\cdots u^2_{b_2})_{\underline{\alpha}} \right\|$ をつぎのように定義する：

$$(3.2)\quad a(t_1^1\cdots t_{a_1}^1, t_1^2\cdots t_{a_2}^2 ; u_1^1\cdots u_{b_1}^1, u_1^2\cdots u_{b_2}^2)_{\alpha} = \begin{cases} 1 & もし\ \theta(t_1^1\cdots t_{a_1}^1 t_1^2\cdots t_{a_2}^2) \xrightarrow{R(\alpha; a_1a_2, b_1b_2)} \theta(u_1^1\cdots u_{b_1}^1, u_1^2\cdots u_{b_2}^2) \\ 0 & その他。\end{cases}$$

$v\times v$ の関係行列 $D_{\alpha}^{(a_1a_2,b_1b_2)}$ を

$$(3.3)\quad D_{\alpha}^{(a_1a_2,b_1b_2)} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{\alpha}^{(a_1a_2,b_1b_2)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

と定義する。またこの関係行列の一次結合によって対称行列 $B_{\alpha}^{(a_1a_2,b_1b_2)}$ も定義出来る。

以下，2因子交互作用までの要因効果について考える $(a_1a_2, b_1b_2 = 00, 10, 01, 20, 02, 11)$。このとき $A_{\alpha}^{(a_1a_2,b_1b_2)}$ はつぎのような性質をもっている：

$$(3.4)\quad \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{(a_1a_2,b_1b_2)} = G_{n_{a_1a_2}\times n_{b_1b_2}},$$

$$(3.5)\quad A_{\alpha}^{(a_1a_2,b_1b_2)} j_{n_{b_1b_2}} = n(\alpha; a_1a_2, b_1b_2)\, j_{n_{a_1a_2}},$$

$$(3.6)\quad A_{\beta}^{(a_1a_2,c_1c_2)} A_{\gamma}^{(c_1c_2,b_1b_2)} = \sum_{\alpha} \mathfrak{z}(a_1a_2, b_1b_2, \alpha; c_1c_2, \beta, \gamma)\, A_{\alpha}^{(a_1a_2,b_1b_2)}。$$

ただし $G_{p\times q}$, j_p は各々すべての要素が1である $p\times q$ の行列，$p\times 1$ のベクトルである。ここで

$$(3.7)\quad \begin{cases} n_{a_1a_2} = \binom{m}{a_1}\binom{m-a_1}{a_2}, \\ n(\alpha; a_1a_2, b_1b_2) = \binom{a_1}{\alpha_{11}^*}\binom{a_1-\alpha_{11}^*}{\alpha_{12}^*}\binom{a_2}{\alpha_{21}^*}\binom{a_2-\alpha_{21}^*}{\alpha_{22}^*}\binom{m-a}{b_1-\alpha_{\cdot 1}^*}\binom{m-a-b_1+\alpha_{\cdot 1}^*}{b_2-\alpha_{\cdot 2}^*}, \\ \mathfrak{z}(a_1a_2, b_1b_2, \alpha; c_1c_2, \beta, \gamma)\ は\ a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, \alpha, \beta, \gamma\ のみの \\ 関数である（詳細は[6]を参照）。\end{cases}$$

ただし $\alpha_{ij}^{*} = \min(a_i, b_j) - \alpha_{ij}$, $\alpha_{\cdot j}^{*} = \alpha_{1j}^{*} + \alpha_{2j}^{*}$ $(i, j = 1, 2)$, $a = a_1 + a_2$ である。

$D_\alpha^{(a_1a_2,b_1b_2)}$ の一次結合によってつぎのような性質をもつ $\nu \times \nu$ の行列 $D_\beta^{\#(a_1a_2,b_1b_2)}$ $(\beta = 0, 1, 2)$ と $D_{fij}^{\#(u_1u_2,v_1v_2)}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ が定義出来る（詳細は [6] か [9] を参照）:

$$
(3.8)\begin{cases}
D_\beta^{\#(a_1a_2,c_1c_2)} D_\gamma^{\#(d_1d_2,b_1b_2)} = \delta_{c_1d_1}\delta_{c_2d_2}\delta_{\beta\gamma} D_\beta^{\#(a_1a_2,b_1b_2)}, \\
D_{fik}^{\#(u_1u_2,w_1w_2)} D_{flj}^{\#(s_1s_2,v_1v_2)} = \delta_{w_1s_1}\delta_{w_2s_2}\delta_{kl} D_{fij}^{\#(u_1u_2,v_1v_2)}, \\
D_\beta^{\#(a_1a_2,b_1b_2)} D_{fij}^{\#(u_1u_2,v_1v_2)} = D_{fij}^{\#(u_1u_2,v_1v_2)} D_\beta^{\#(a_1a_2,b_1b_2)} = O_\nu .
\end{cases}
$$

ただし $\beta, \gamma = 0, 1, 2$; $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$, そして O_p はすべての要素が0である $p \times p$ の行列である。

$\mathfrak{N}$ を積に関して閉じている 82 個の $D_\alpha^{(a_1a_2,b_1b_2)}$, あるいは 49 個の $B_\alpha^{(a_1a_2,b_1b_2)}$ によって生成される多次元関係環とする。

定理3.1.

(i) $\mathfrak{N} = [D_\alpha^{(a_1a_2,b_1b_2)}] = \{B_\alpha^{(a_1a_2,b_1b_2)}\}$

$= [D_\beta^{\#(a_1a_2,b_1b_2)}, D_{fij}^{\#(u_1u_2,v_1v_2)}; \beta = 0, 1, 2 : i, j = 1, 2, 3, 4]$。

(ii) $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 \oplus \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{N}_f$ 。

ただし $\mathfrak{N}_\beta = [D_\beta^{\#(a_1a_2,b_1b_2)}]$ $(\beta = 0, 1, 2)$, $\mathfrak{N}_f = [D_{fij}^{\#(u_1u_2,v_1v_2)}]$ である。

(iii) $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_f$ は各々重複度 $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = m(m-3)/2$, $\varphi_2 = \binom{m-1}{2}$, $\varphi_f = m-1$ をもつ 6×6, 3×3, 1×1, 6×6 の完全行列環と同形である。

§4. 別名行列のノルム.

(2, 2) で与えられた $\hat{\underline{\theta}}$ は模型 (2, 1) の下では $\underline{\theta}$ の不偏推定量になっているが，模型

(4, 1) $\quad \mathcal{E}[\underline{y}(T)] = E_T\underline{\theta} + E_T^*\underline{\theta}^*$

の下では

(4, 2) $\quad \mathcal{E}[\hat{\underline{\theta}}] = \underline{\theta} + A_T\underline{\theta}^*$

となる。ただし $\underline{\theta}^{*\prime} = (\{\theta(t_5^1t_6^1t_7^1)\};\{\theta(t_5^2t_6^2t_7^2)\};\{\theta(t_8^1t_9^1t_{10}^2)\};\{\theta(t_8^2t_9^2t_{10}^1)\})$, $A_T = M_T^{-1}E_T'E_T^*$ で別名行列と呼ばれる。ここで $t_5 < t_6 < t_7$, $t_8 < t_9$, $t_8 \neq t_{10}$, $t_9 \neq t_{10}$ である。そこで模型 (4, 1) の下で，ある意味において良い計画を求める基準として別名行列のノルム $\|A_T\| = \{tr(A_T'A_T)\}^{1/2}$ が考えられた (Hedayat, Raktoe & Federer [3])。

T を BA$[N, m, 3, 5]\{\lambda_{i_0i_1i_2} \mid i_0+i_1+i_2=5\}$ とし，$\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_f$ に関する M_T の既約表現を各々 $K_0 = \|\kappa_0^{a_1a_2,b_1b_2}\|$ (6×6), $K_1 = \|\kappa_1^{c_1c_2,d_1d_2}\|$ (3×3), $K_2 = \|\kappa_2^{11,11}\|$ (1×1), $K_f = \|\kappa_{f;j}^{u_1u_2,v_1v_2}\|$ (6×6) とする。ただし

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\kappa_0^{00,00} = p_{(0000)}^{(00,00)}, \quad \kappa_0^{00,b_1b_2} = (m)^{1/2}p_{(0000)}^{(00,b_1b_2)}, \quad \kappa_0^{00,b_1'b_2'} = \{\binom{m}{2}\}^{1/2}p_{(0000)}^{(00,b_1'b_2')}, \\
\kappa_0^{00,11} = \{2\binom{m}{2}\}^{1/2}p_{(0000)}^{(00,11)}, \quad \kappa_0^{a_1a_2,b_1b_2} = p_{(0000)}^{(a_1a_2,b_1b_2)} + (m-1)\,p_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,b_1b_2)}, \\
\kappa_0^{a_1a_2,b_1'b_2'} = \{(m-1)/2\}^{1/2}\{2p_{(0000)}^{(a_1a_2,b_1'b_2')} + (m-2)\,p_{\underline{\beta}}^{(a_1a_2,b_1b_2)}\}, \quad \kappa_0^{a_1a_2,11} \\
= (m-1)^{1/2}\{p_{\underline{\gamma}_0}^{(a_1a_2,11)} + p_{\underline{\gamma}_1}^{(a_1a_2,11)} + (m-2)\,p_{\underline{\gamma}_2}^{(a_1a_2,11)}\}, \quad \kappa_0^{a_1'a_2',b_1'b_2'} = p_{(0000)}^{(a_1'a_2',b_1'b_2')} \\
+ 2(m-2)\,p_{\underline{\delta}_1}^{(a_1'a_2',b_1'b_2')} + \binom{m-2}{2}p_{\underline{\delta}_2}^{(a_1'a_2',b_1'b_2')}, \quad \kappa_0^{a_1'a_2',11} = 2^{1/2}\{p_{(0000)}^{(a_1'a_2',11)}
\end{array}
\right.
$$

$$
(4.3)\quad \left\{ \begin{aligned}
& +(m-2)\left(p_{\xi_1}^{(a_1'a_2',11)} + p_{\xi_2}^{(a_1'a_2',11)}\right) + \binom{m-2}{2} p_{\xi_3}^{(a_1'a_2',11)} \Big\}, \quad r_0^{11,11} = p_{(0110)}^{(11,11)} \\
& + p_{(1001)}^{(11,11)} + (m-2)\left\{ p_{(0111)}^{(11,11)} + p_{(1110)}^{(11,11)} + p_{(1011)}^{(11,11)} + p_{(1101)}^{(11,11)} \right\} + 2\binom{m-2}{2} p_{(1111)}^{(11,11)}, \\
& r_1^{a_1'a_2',b_1'b_2'} = p_{(0000)}^{(a_1'a_2',b_1'b_2')} - 2p_{\xi_1}^{(a_1'a_2',b_1'b_2')} + p_{\xi_2}^{(a_1'a_2',b_1'b_2')}, \quad r_1^{a_1'a_2',11} = 2^{1/2} \\
& \times \left\{ p_{(0000)}^{(a_1'a_2',11)} - p_{\xi_1}^{(a_1'a_2',11)} - p_{\xi_2}^{(a_1'a_2',11)} + p_{\xi_3}^{(a_1'a_2',11)} \right\}, \quad r_1^{11,11} = p_{(0110)}^{(11,11)} + p_{(1001)}^{(11,11)} \\
& - p_{(0111)}^{(11,11)} - p_{(1110)}^{(11,11)} - p_{(1011)}^{(11,11)} - p_{(1101)}^{(11,11)} + 2p_{(1111)}^{(11,11)}, \quad r_2^{11,11} = p_{(0110)}^{(11,11)} \\
& - p_{(1001)}^{(11,11)} - p_{(0111)}^{(11,11)} - p_{(1110)}^{(11,11)} + p_{(1011)}^{(11,11)} + p_{(1101)}^{(11,11)}, \quad r_{f_{11}}^{a_1a_2,b_1b_2} = p_{(0000)}^{(a_1a_2,b_1b_2)} \\
& - p_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,b_1b_2)}, \quad r_{f_{12}}^{a_1a_2,b_1'b_2'} = (m-2)^{1/2}\left(p_{(0000)}^{(a_1a_2,b_1'b_2')} - p_{\underline{\beta}}^{(a_1a_2,b_1'b_2')} \right), \\
& r_{f_{13}}^{a_1a_2,11} = (m/2)^{1/2}\left(p_{\xi_0}^{(a_1a_2,11)} - p_{\xi_1}^{(a_1a_2,11)} \right), \quad r_{f_{14}}^{a_1a_2,11} = \{(m-2)/2\}^{1/2} \\
& \times \left\{ p_{\xi_0}^{(a_1a_2,11)} + p_{\xi_1}^{(a_1a_2,11)} - 2p_{\xi_2}^{(a_1a_2,11)} \right\}, \quad r_{f_{22}}^{a_1'a_2',b_1'b_2'} = p_{(0000)}^{(a_1'a_2',b_1'b_2')} \\
& + (m-4)p_{\xi_1}^{(a_1'a_2',b_1'b_2')} - (m-3)p_{\xi_2}^{(a_1'a_2',b_1'b_2')}, \quad r_{f_{23}}^{a_1'a_2',11} = \{m(m-2)/2\}^{1/2} \\
& \times \left(p_{\xi_1}^{(a_1'a_2',11)} - p_{\xi_2}^{(a_1'a_2',11)} \right), \quad r_{f_{24}}^{a_1'a_2',11} = (1/2)^{1/2}\left\{ 2p_{(0000)}^{(a_1'a_2',11)} + (m-4) \right. \\
& \left. \times \left(p_{\xi_1}^{(a_1'a_2',11)} + p_{\xi_2}^{(a_1'a_2',11)} \right) - 2(m-3)p_{\xi_3}^{(a_1'a_2',11)} \right\}, \quad r_{f_{33}}^{11,11} = (1/2) \\
& \times \left\{ 2\left(p_{(0110)}^{(11,11)} - p_{(0110)}^{(11,11)} \right) + (m-2)\left(p_{(0111)}^{(11,11)} + p_{(1110)}^{(11,11)} - p_{(1011)}^{(11,11)} - p_{(1101)}^{(11,11)} \right) \right\}, \\
& r_{f_{34}}^{11,11} = \left[\{m(m-2)\}^{1/2}/2 \right]\left(p_{(0111)}^{(11,11)} - p_{(1110)}^{(11,11)} \right), \quad r_{f_{44}}^{11,11} = (1/2) \\
& \times \left\{ 2\left(p_{(0110)}^{(11,11)} + p_{(1001)}^{(11,11)} \right) + (m-4)\left(p_{(0111)}^{(11,11)} + p_{(1110)}^{(11,11)} + p_{(1011)}^{(11,11)} + p_{(1101)}^{(11,11)} \right) \right. \\
& \left. - 4(m-3)p_{(1111)}^{(11,11)} \right\}
\end{aligned} \right.
$$

である。ここで各々 $(a_1a_2, b_1b_2) = (10,10), (10,01), (01,01)$ に応じて $\underline{\alpha} = (1000), (0100), (0001)$；$(a_1a_2, b_1'b_2') = (10,20), (10,02)$ $(01,20), (01,02)$ に応じて $\underline{\beta} = (1000), (0100), (0010), (0001)$；$a_1a_2 = 10, 01$ に応じて $\xi_0 = (0100), (0001)$, $\xi_1 = (1000), (0010)$, $\xi_2 = (1100), (0011)$；$(a_1'a_2', b_1'b_2') = (20,20), (20,02), (02,02)$

に応じて $\eta_r=(r000), (0r00), (000r)$ （ただし $r=1,2$）; $a_1'a_2'=20, 02$ に応じて $\xi_1=(0100), (0001)$, $\xi_2=(1000), (0010)$, $\xi_3=(1100), (0011)$ であり, $p_{\alpha}^{(a_1a_2,b_1b_2)}$ は $\theta(t_1^1\cdots t_{a_1}^1 t_1^2\cdots t_{a_2}^2)\xrightarrow{R(\alpha;\, a_1a_2,\, b_1b_2)}\theta(u_1^1\cdots u_{b_1}^1 u_1^2\cdots u_{b_2}^2)$ であるときの M_T の $\theta(t_1^1\cdots t_{a_1}^1 t_1^2\cdots t_{a_2}^2)$ - 行, $\theta(u_1^1\cdots u_{b_1}^1 u_1^2\cdots u_{b_2}^2)$ - 列の要素である。

$p_{\alpha}^{(a_1a_2,b_1b_2)}$ （$a_1a_2, b_1b_2 = 00, 10, 01, 20, 02, 11$）と $\gamma_{p_0p_1p_2}$ （$p_0+p_1+p_2=5$）の関係は

$$
(4.4)\left\{
\begin{aligned}
&p_{(0000)}^{(00,00)}=\gamma_{500}=N,\quad p_{(0000)}^{(00,10)}=p_{(0000)}^{(10,01)}=\gamma_{410},\quad p_{(0000)}^{(00,01)}\\
&=\gamma_{401},\quad p_{(0000)}^{(00,20)}=p_{(1000)}^{(10,10)}=p_{(1000)}^{(10,11)}=p_{(0000)}^{(01,20)}=p_{(0000)}^{(20,02)}\\
&=p_{(1001)}^{(11,11)}=\gamma_{320},\quad p_{(0000)}^{(00,02)}=p_{(0001)}^{(01,01)}=\gamma_{302},\quad p_{(0000)}^{(00,11)}=p_{(0100)}^{(10,01)}\\
&=p_{(0000)}^{(10,02)}=p_{(0001)}^{(01,11)}=\gamma_{311},\quad p_{(0000)}^{(10,10)}=(2N+\gamma_{401})/3,\quad p_{(0000)}^{(10,20)}\\
&=p_{(0000)}^{(20,11)}=(2\gamma_{410}+\gamma_{311})/3,\quad p_{(1000)}^{(10,20)}=p_{(1000)}^{(20,11)}=\gamma_{230},\quad p_{(0100)}^{(10,02)}\\
&=p_{(0011)}^{(01,11)}=p_{(0001)}^{(02,11)}=\gamma_{212},\quad p_{(0100)}^{(10,11)}=(2\gamma_{401}+\gamma_{302})/3,\\
&p_{(1100)}^{(10,11)}=p_{(0010)}^{(01,20)}=p_{(0100)}^{(20,02)}=p_{(1011)}^{(11,11)}=p_{(1101)}^{(11,11)}=\gamma_{221},\quad p_{(0000)}^{(01,01)}\\
&=2N-\gamma_{401},\quad p_{(0000)}^{(01,02)}=2\gamma_{401}-\gamma_{302},\quad p_{(0001)}^{(01,02)}=\gamma_{203},\quad p_{(0010)}^{(10,11)}\\
&=p_{(0000)}^{(02,11)}=2\gamma_{410}-\gamma_{311},\quad p_{(0000)}^{(20,20)}=(4N+4\gamma_{401}+\gamma_{302})/9,\\
&p_{(1000)}^{(20,20)}=(2\gamma_{320}+\gamma_{221})/3,\quad p_{(2000)}^{(20,20)}=\gamma_{140},\quad p_{(0200)}^{(20,02)}\\
&=p_{(1111)}^{(11,11)}=\gamma_{122},\quad p_{(0100)}^{(20,11)}=(2\gamma_{311}+\gamma_{212})/3,\quad p_{(1100)}^{(20,11)}=\gamma_{131},\\
&p_{(0000)}^{(02,02)}=4N-4\gamma_{401}+\gamma_{302},\quad p_{(0001)}^{(02,02)}=2\gamma_{302}-\gamma_{203},\quad p_{(0002)}^{(02,02)}\\
&=\gamma_{104},\quad p_{(0010)}^{(02,11)}=2\gamma_{311}-\gamma_{212},\quad p_{(0011)}^{(02,11)}=\gamma_{113},\quad p_{(0110)}^{(11,11)}\\
&=(4N-\gamma_{302})/3,\quad p_{(0111)}^{(11,11)}=(2\gamma_{302}+\gamma_{203})/3,\quad p_{(1110)}^{(11,11)}
\end{aligned}
\right.
$$

$$l = 2\gamma_{320} - \gamma_{221}$$

で与えられる。また $p_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,\,b_1b_2)} = p_{\underline{\alpha}}^{(b_1b_2,\,a_1a_2)}$ である。

一方

$$(4.5)\quad E_T' E_T^* = \sum_{a_1a_2}\sum_{b_1b_2}\sum_{\underline{\alpha}} p_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,\,b_1b_2)}\, H_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,\,b_1b_2)}$$

である。ただし $a_1a_2 = 00, 10, 01, 20, 02, 11$; $b_1b_2 = 30, 03, 21, 12$, $H_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,\,b_1b_2)}$ は $\nu \times 8\binom{M}{3}$ の行列で

$$(4.6)\quad H_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,\,b_1b_2)} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,\,b_1b_2)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

である。また $p_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,\,b_1b_2)}$ ($a_1a_2 = 00, 10, 01, 20, 02, 11$; $b_1b_2 = 30, 03, 21, 12$) と $\gamma_{p_0p_1p_2}$ ($p_0+p_1+p_2 = 5$) の関係は.

$$\left\{\begin{array}{l}
p_{(0000)}^{(00,30)} = p_{(1000)}^{(10,21)} = p_{(0000)}^{(01,30)} = p_{(1000)}^{(20,12)} = p_{(0000)}^{(02,30)} = p_{(1001)}^{(11,21)} = \gamma_{230}, \\
p_{(0000)}^{(00,03)} = \gamma_{203}, \quad p_{(0000)}^{(00,21)} = p_{(1000)}^{(10,12)} = p_{(0001)}^{(01,21)} = p_{(0000)}^{(20,03)} = p_{(0001)}^{(02,21)} \\
= p_{(1001)}^{(11,12)} = \gamma_{221}, \quad p_{(0000)}^{(00,12)} = p_{(0000)}^{(10,03)} = p_{(0001)}^{(01,12)} = \gamma_{212}, \quad p_{(0000)}^{(10,30)} \\
= p_{(1000)}^{(20,21)} = p_{(0000)}^{(11,30)} = (2\gamma_{320} + \gamma_{221})/3, \quad p_{(1000)}^{(10,30)} = p_{(2000)}^{(20,21)} \\
= p_{(1000)}^{(11,30)} = \gamma_{140}, \quad p_{(0100)}^{(10,03)} = p_{(0011)}^{(01,12)} = p_{(0002)}^{(02,12)} = p_{(0001)}^{(11,03)} = \gamma_{113}, \\
p_{(0100)}^{(10,21)} = p_{(0100)}^{(20,12)} = p_{(0101)}^{(11,21)} = (2\gamma_{311} + \gamma_{212})/3, \quad p_{(1100)}^{(10,21)} \\
= p_{(0010)}^{(01,30)} = p_{(1100)}^{(20,12)} = p_{(0010)}^{(02,30)} = p_{(1011)}^{(11,21)} = p_{(1101)}^{(11,21)} = \gamma_{131}, \quad p_{(0100)}^{(10,12)} \\
= (2\gamma_{302} + \gamma_{203})/3, \quad p_{(1100)}^{(10,12)} = p_{(0011)}^{(01,21)} = p_{(0100)}^{(20,03)} = p_{(0011)}^{(02,21)} \\
= p_{(1011)}^{(11,12)} = p_{(1101)}^{(11,12)} = \gamma_{122}, \quad p_{(0000)}^{(01,03)} = 2\gamma_{302} - \gamma_{203}, \quad p_{(0001)}^{(10,03)} \\
= \gamma_{104}, \quad p_{(0010)}^{(01,21)} = p_{(0010)}^{(02,21)} = p_{(1010)}^{(11,12)} = 2\gamma_{320} - \gamma_{221}, \quad p_{(0010)}^{(01,12)}
\end{array}\right.$$

$$
(4.7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&= p^{(02,12)}_{(0001)} = p^{(11,03)}_{(0000)} = 2\gamma_{311} - \gamma_{212}, \quad p^{(20,30)}_{(0000)} = (4\gamma_{410} \\
&+ 4\gamma_{311} + \gamma_{212})/9, \quad p^{(20,30)}_{(1000)} = (2\gamma_{230} + \gamma_{131})/3, \quad p^{(20,30)}_{(2000)} \\
&= \gamma_{050}, \quad p^{(20,03)}_{(0200)} = p^{(20,12)}_{(1000)} = p^{(02,21)}_{(0021)} = p^{(11,12)}_{(1111)} = \gamma_{023}, \\
&p^{(20,21)}_{(0100)} = (4\gamma_{401} + 4\gamma_{302} + \gamma_{203})/9, \quad p^{(20,21)}_{(1100)} = p^{(11,30)}_{(0010)} \\
&= (2\gamma_{221} + \gamma_{122})/3, \quad p^{(20,21)}_{(2100)} = p^{(11,30)}_{(1010)} = \gamma_{041}, \quad p^{(20,12)}_{(0200)} \\
&= p^{(11,21)}_{(0111)} = (2\gamma_{212} + \gamma_{113})/3, \quad p^{(20,12)}_{(1200)} = p^{(02,30)}_{(0020)} = p^{(11,21)}_{(1111)} \\
&= \gamma_{032}, \quad p^{(02,03)}_{(0000)} = 4\gamma_{401} - 4\gamma_{302} + \gamma_{203}, \quad p^{(02,03)}_{(0001)} = 2\gamma_{203} \\
&- \gamma_{104}, \quad p^{(02,03)}_{(0002)} = \gamma_{005}, \quad p^{(02,21)}_{(0020)} = p^{(11,12)}_{(1100)} = 2\gamma_{221} - \gamma_{122}, \\
&p^{(02,12)}_{(0010)} = 4\gamma_{410} - 4\gamma_{311} + \gamma_{212}, \quad p^{(02,12)}_{(0011)} = p^{(11,03)}_{(0100)} = 2\gamma_{212} \\
&- \gamma_{113}, \quad p^{(02,12)}_{(0012)} = p^{(11,03)}_{(0101)} = \gamma_{014}, \quad p^{(11,21)}_{(0110)} = (4\gamma_{410} \\
&- \gamma_{212})/3, \quad p^{(11,21)}_{(1110)} = 2\gamma_{230} - \gamma_{131}, \quad p^{(11,12)}_{(0110)} = (4\gamma_{401} \\
&- \gamma_{203})/3, \quad p^{(11,12)}_{(0111)} = (2\gamma_{203} + \gamma_{104})/3
\end{aligned}
\right.
$$

で与えられる。

(3.6), (4.6) より

$$
(4.8)\quad (E_T' E_T^*)(E_T' E_T^*)'
$$
$$
= \Big(\sum_{a_1a_2}\sum_{c_1c_2}\sum_{\underline{\beta}} p_{\underline{\beta}}^{(a_1a_2,c_1c_2)} H_{\underline{\beta}}^{(a_1a_2,c_1c_2)}\Big)\Big(\sum_{d_1d_2}\sum_{b_1b_2}\sum_{\underline{\gamma}} p_{\underline{\gamma}}^{(b_1b_2,d_1d_2)} H_{\underline{\gamma}}^{(b_1b_2,d_1d_2)}\Big)'
$$
$$
= \sum_{a_1a_2}\sum_{b_1b_2}\sum_{\underline{\alpha}} r_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,b_1b_2)} D_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,b_1b_2)}
$$

なので，$(E_T' E_T^*)(E_T' E_T^*)' \in \Omega$ である。ただし

$$
(4.9)\quad r_{\underline{\alpha}}^{(a_1a_2,b_1b_2)} = \sum_{c_1c_2}\sum_{\underline{\beta}}\sum_{\underline{\gamma}} \delta(a_1a_2, b_1b_2, \underline{\alpha}; c_1c_2, \underline{\beta}, \underline{\gamma})\, p_{\underline{\beta}}^{(a_1a_2,c_1c_2)}\, p_{\underline{\gamma}}^{(c_1c_2,b_1b_2)}
$$

である。よって $A_T A_T' \in \Omega$ である.

Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_4 に関する $(E_T' E_T^*)(E_T' E_T^*)'$ の既約表現を各

と $K_0^* = \| r_0^{*\,a_1a_2,b_1b_2} \|$ (6×6), $K_1^* = \| r_1^{*\,c_1c_2,d_1d_2} \|$ (3×3), $K_2^* = \| r_2^{*\,11,11} \|$ (1×1), $K_f^* = \| r_{fij}^{*\,u_1u_2,v_1v_2} \|$ (6×6) とする。ただし $r_p^{*\,\cdot\cdot,\cdot\cdot}$, $r_{fij}^{*\,\cdot\cdot,\cdot\cdot}$ は (4, 3)における $p_{\underline{\alpha}}^{(\cdot\cdot,\cdot\cdot)}$ を $r_{\underline{\alpha}}^{(\cdot\cdot,\cdot\cdot)}$ に置き換えたものである。

<u>定理4.1.</u> $BA[N, m, 3, 5]\{\lambda_{i_0i_1i_2}\}$ から得られる計画 T に対して, $\det(M_T) \neq 0$ の下で,

$$(4.10) \quad \| A_T \|^2 = \phi_0 \times tr(K_0^{-1} K_0^* K_0^{-1}) + \phi_1 \times tr(K_1^{-1} K_1^* K_1^{-1}) + \phi_2 \times tr(K_2^{-1} K_2^* K_2^{-1}) + \phi_f \times tr(K_f^{-1} K_f^* K_f^{-1})$$

である。

REFERENCES

[1] Bose, R.C. and Srivastava, J.N. (1964). Multidimensional partially balanced designs and their analisis, with applications to partially balanced factorial fractions. Sankhyā (A) <u>26</u> 145-168.

[2] Chakravarti, I.M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. Sankhyā <u>17</u> 143-164.

[3] Hedayat, A., Raktoe, B.L. and Federer, W.T. (1974). On a measure of aliasing due to fitting an incomplete model. Ann. Statist. <u>2</u> 650-660.

[4] Hoke, A.T. (1974). Economical second-order designs based on irregular fractions of the 3^n factorial. Technometrics <u>16</u> 375-384.

[5] Hoke, A.T. (1975). The characteristic polynomial of the information matrix for second-order models. Ann. Statist. <u>3</u> 780-786.

[6] Kuwada, M. (1979a). Optimal balanced fractional 3^m factorial designs

of resolution V and balanced third-order designs. Hiroshima Math. J. 9 347-450.

[7] Kuwada, M. (1979b). Balanced arrays of strength 4 and balanced fractional 3^m factorial designs. J. Statist. Planning Inf. 3 347-360.

[8] Kuwada, M. (1979c). Optimal balanced fractional 3^m factorial designs of resolution IV. Submitted for publication.

[9] Kuwada, M. Characteristic polynomials of the information matrices of balanced fractional 3^m factorial designs of resolution V. (to appear in) J. Statist. Planning Inf..

[10] Shirakura, T. (1976a). Balanced fractional 2^m factorial designs of even resolution obtained from balanced arrays of strength 2ℓ with index $\mu_\ell=0$. Ann. Statist. 4 723-735.

[11] Shirakura, T. (1976b). A note on the norm of alias matrices in fractional replication. Austral. J. Statist. 18 158-160.

[12] Shirakura, T. (1979). On the norm of alias matrices in balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$. J. Statist. Planning Inf. 3 337-345.

[13] Srivastava, J.N. and Chopra, D.V. (1973). Balanced fractional factorial designs of resolution V for 3^m series. Bull Intern. Statist. Inst. 39 271-276.