数理解析研究所講究録
第 407 巻 1980 年 27-38



# 写像度について

成城大 経済　　松江広文

有限次元多様体における写像度、及びその応用について述べ、次に Lefschetz 数と不動点定理を述べる。更にその一般化である Banach space における不動点定理と、set-valued mapping に対する不動点定理、ならびに Leray-Schauder degree についてもふれたい。

## 1. 写像度

M, N; Compact で、境界のない、向きのつけられた、連結な $n$ 次元多様体とする。

$f: M \longrightarrow N$ が連続写像のとき、$f$ の写像度 $\deg f$ を定義するには次の3通りの方法がある。

I. 組合せ位相幾何学的方法（Brouwer の方法）

[1], [2], [7]

M, N が単体分割されているとする。$f$ を単体写像で近似

し、その単体写像に対する写像度を下記のように定義する。（この時、単体写像に対する写像度は、近似した単体写像のとり方によらないことがいえる。よって、この単体写像に対する写像度を $f$ の写像度 $\deg f$ と定義する。）

K，Lをそれぞれ M，Nの単体分割とし、$L_f$ を $f$ を近似した単体写像とする。 $L_f : K \longrightarrow L$

Case 1. Kのすべての $n$-単体 $\sigma^n$ が、$L_f$ により $n$ 次元より小さいLの単体に写される時。

$\deg L_f = 0$ と定義する。

Case 2. $L_f(\sigma^n) = \tau^n$ となるLの単体 $\tau^n$ が存在する時。

このとき、$L_f$ によって $\tau^n$ に写されるKの $n$-単体の全体を $\sigma_1^n, \cdots, \sigma_k^n$ とする。$L_f$ により、$\tau^n$ の向きに一致するように写される $\sigma_i^n$ の個数から、$\tau^n$ の向きと反対に写される $\sigma_j^n$ の個数を引いた数を $\deg L_f$ と定義する。

II. 微分位相幾何学的方法　[6]，[8]

M，N を $C^\infty$ 可微分多様体、$f$ を $C^\infty$ 可微分写像とする。

$a \in M$ が $f$ の正常点の時

$$(df)_a : T_a(M) \longrightarrow T_{f(a)}(M)$$

は向きづけられた線形空間の間の同型写像であるから、

$$\mathrm{sign}\,(df)_a = +1 \quad \cdots \quad \det(df)_a > 0 \text{ の時}$$

$$sign(df)_a = -1 \quad \cdots \quad det(df)_a < 0 \text{ の時}$$

と定義する。

$b \in N$ が $f$ の正常値の時，$f^{-1}(b)$ は有限集合であるから，

$\sum_{a \in f^{-1}(b)} sign(df)_a \in \mathbb{Z}$ である。この整数を $deg(f;b)$

と書く。このとき $deg(f;b)$ は正常値 $b \in N$ のとり方によらないことがいえる。よって $deg\, f = deg(f;b)$ と定義する。

$f$ の像に正常値が存在しない時は $deg\, f = 0$ と定義する。

Ⅲ．代数的位相幾何学的方法　[2]，[3]，[4]

$M$，$N$ を単体的多様体とする。整数の加群 $\mathbb{Z}$ を係数とする $M$，$N$ の $n$ 次元ホモロジー群は，それぞれ $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$，$H_n(N) \cong \mathbb{Z}$ であって，*fundamental class* $[M]$，$[N]$ により *generate* される。$f: M \longrightarrow N$ を連続写像とする時，準同型写像 $f_*: H_n(M) \longrightarrow H_n(N)$ が定まる。

$$f_*([M]) = \gamma(f)[N], \quad \gamma(f) \in \mathbb{Z}$$

のとき，$\gamma(f)$ を $f$ の写像度 $deg\, f$ と定義する。

例1．　[1]，[3]，[4]，[6]

$S^1 = \{ z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \}$ とする。

$g_r : S^1 \longrightarrow S^1$ を $g_r(z) = z^r$，$r \in \mathbb{Z}$ で定義する。

このとき，$deg\, g_r = r$ である。

例2. [4]

$S^{n-1}=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}$

連続写像 $f:S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}$ に対し、その suspension map を $Ef:S^n\longrightarrow S^n$ とすると、$\deg Ef=\deg f$ が成り立つ。

連続写像 $f:S^n\longrightarrow S^n$ の $\deg f$ に対し、次の7つの性質が成り立つ。[3]

性質1. 定値写像の写像度は0である。

性質2. 恒等写像の写像度は1である。

性質3. 対心写像の写像度は $(-1)^{n+1}$ である。

性質4. 連続写像 $f,g:S^n\longrightarrow S^n$ に対し

$$\deg(g\circ f)=(\deg f)(\deg g)$$

性質5. 連続写像 $f,h:S^n\longrightarrow S^n$ がホモトープならば

$$\deg f=\deg h$$

性質6. 連続写像 $f:S^n\longrightarrow S^n$ に対し
$^\forall x\in S^n,\ f(-x)=f(x)$ が成り立つ時、
$\deg f$ は偶数である。

性質7. 連続写像 $f:S^n\longrightarrow S^n$ に対し
$^\forall x\in S^n,\ f(-x)=-f(x)$ が成り立つ時
$\deg f$ は奇数である。

応用1.　[3]

性質1，5，7を用いると、次の定理がいえる。

定理. 任意の連続写像 $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ に対し

$$\exists x \in S^2 \text{ such that } f(-x) = f(x)$$

この定理は、地球上において、ちょうど裏側の地点と同じ気温と気圧をもつような地点が必ずどの瞬間にも存在することを示している。

応用2.　[4]

連続写像 $f : S^2 \longrightarrow S^2$ が onto でなければ $f$ は定値写像にホモトープである。このことと、例1，例2，性質1，5を用いると、次の定理がいえる。

定理（代数学の基本定理） $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を複素数とするとき、方程式

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

（$n \geqq 1$）は複素数の範囲で必ず根をもつ。

## 2. Lefschetz 数と不動点定理　[3]，[5]，[9]

$X$ を位相空間、$f : X \longrightarrow X$ を連続写像とするとき、$f(x) = x$ なる点 $x \in X$ を $f$ の不動点という。

$X$ を有限単体的複体 $K^n$ の多面体 $|K^n|$ とし、$H_i(X)$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ を係数とする $X$ の $i$ 次元ホモロジー群とするとき、

$f_{*i}: H_i(X) \longrightarrow H_i(X)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ は線形写像である。$L(f)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i tr(f_{*i})$ を $f$ の Lefschetz 数という。

定理（Lefschetz の不動点定理） $X=|K^n|$ とする。

連続写像 $f: X \longrightarrow X$ は、$L(f) \neq 0$ ならば不動点を持つ。

$X$ が acyclic すなわち、

$$H_0(X) \cong \mathbb{Q}, \quad H_i(X)=0, \quad i=1,\cdots,n$$

の時、連続写像 $f: X \longrightarrow X$ に対し

$$f_{*0} = id : H_0(X) \longrightarrow H_0(X)$$

$$f_{*i} = 0, \quad i=1,\cdots,n$$

である。したがって $L(f)=1$。

特に、$D^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2 \leqq 1\}$ は acyclic 故、次の定理が成り立つ。

定理（Brouwer の不動点定理） [1] ～ [10]

連続写像 $f: D^n \longrightarrow D^n$ は不動点を持つ。

系（Frobenius の定理） [1], [3], [6], [10]

$A=(a_{ij})$ を非負正方行列とする（すなわち、各 $i, j$ に対し $a_{ij} \geqq 0$）。このとき、$A$ の固有値 $\lambda$ で、$\lambda \geqq 0$ となるものが少くとも一つ存在する。

## 3. 不動点定理の一般化

無限次元空間においては．Brouwer の不動点定理に相当することが必ずしも成り立たないことが、次の例により知られている。

例．［13］

$X$ を $l_2$ とする．（ただし $l_2$ とは、複素数の sequence $x=(x_1, x_2, \cdots)$ で $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<+\infty$ をみたす $x$ 全体からなる空間である。） $X$ における closed unit ball を $B$ とする（すなわち $B=\{x\in X \mid \|x\|\leqq 1\}$）。連続写像 $f: B\longrightarrow B$ を $x=(x_1, x_2, \cdots)\in B$ に対し $f(x)=(\sqrt{1-\|x\|^2}, x_1, x_2, \cdots)$ により定義すると．$f$ は不動点を持たないことが容易にわかる。

ところが．条件をつければ Brouwer の不動点定理の一般化である次の定理が成り立つ。

定理（Schauder の不動点定理）　［6］，［13］

$X$ を Banach space，$A$ を $X$ の subset とし．$f: A\longrightarrow A$ を連続写像とする。$A$ が closed convex set で．$\overline{f(A)}$ が compact ならば．$f$ は不動点をもつ。

この定理の応用として．微分方程式の解の存在定理がいえる。［6］

一方．set-valued mapping に対する次のような不動点

定理の一般化がある。

$\sigma^n$ を $n$-単体とし、$2^{\sigma^n}$ を $\sigma^n$ の部分集合全体からなる集合とする。$2^{\sigma^n} \supset K(\sigma^n) = \{X \mid \sigma^n \supset X;\ \sigma^n$ の closed convex subset$\}$。

$F: \sigma^n \longrightarrow K(\sigma^n)$ が upper semicontinuous (USC) at $x$ とは、$\sigma^n$ の点列 $\{x_n\}$ で $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 且つ $y_n \in F(x_n)$ なる点列 $\{y_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ のとき、$y \in F(x)$ となることと定義する。

$\sigma^n$ の各点で $F$ が USC の時、$F$ は $\sigma^n$ 上 USC であるという。

定理（角谷の不動点定理） [1], [10]

$F: \sigma^n \longrightarrow K(\sigma^n)$ が $\sigma^n$ 上 USC ならば、$x_0 \in F(x_0)$ となる点 $x_0 \in \sigma^n$ が少くとも一つ存在する。

註. $\sigma^n$ の代わりに $\mathbb{R}^n$ の compact convex set をとっても、上の定理は成り立つ。

## 4. Leray-Schauder degree

$X$ を Banach space とし、$A$ を $X$ の subset とする。連続写像 $f: A \longrightarrow X$ が compact であるとは、すべての bounded closed subset $C \subset A$ に対し、$\overline{f(C)}$ が

compactであることと定義する。

$X$をBanach space，$\Omega$を$X$のopen subsetとする。$g:\overline{\Omega}\longrightarrow X$がcompactな連続写像のとき、$a\in X$に対し$(I-g)^{-1}(a)$が$\Omega$のcompact subsetならば、Leray-Schauder degree $\deg(I-g,\Omega,a)$が定義される。これは次の意味でLefschetz数の拡張になっている。

$C$をBanach space $X$におけるcompact convex setsのfinite unionとし、$\Omega$を$C$のopen subsetとする。$g:\Omega\longrightarrow C$が連続写像で$(I-g)^{-1}(0)=\{x\in\Omega \mid g(x)=x\}$がcompact（あるいはempty）であるとする。この時 $\deg(I-g,\Omega,0)$が定義される。特に、$\Omega=C$の時 $\deg(I-g,\Omega,0)=L(g)$ である。ただし、$L(g)$は連続写像$g:C\longrightarrow C$のLefschetz数。

Leray-Schauder degree の一般化とその応用については、[12]，[13] を参照されたい。

## 5. Webbによる一般化 [11]

$X$をBanach spaceとする。$X\supset\Omega$の$r$-neighbourhoodを$B(\Omega;r)=\{y\in X \mid {}^{\exists}x\in\Omega \text{ such that } \|y-x\|<r\}$と定義する。$G:X\longrightarrow 2^X$ のとき、$X\supset\Omega$に対し

$G(\Omega) = \bigcup_{x \in \Omega} G(x)$。

$G : X \longrightarrow 2^X$ が USC at $x \in X$ とは、$G(X)$ が closed で且つ $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ such that $G(B(x;\delta)) \subset B(G(x);\varepsilon)$ である。

$X$ の各点で $G$ が USC の時、$G$ は $X$ 上 USC であるという。

$X \supset \Omega$ に対し、$co(\Omega)$ は convex hull、すなわち、$\Omega$ を含む、$X$ における最小の convex set とする。$\overline{co}(\Omega)$ はその closure とする。

$\Omega$ が $X$ の bounded open subset で、$G : \overline{\Omega} \longrightarrow 2^X$ が $\overline{\Omega}$ 上 USC であるとき、$K_1 = \overline{co}(G(\overline{\Omega}))$,
$K_n = \overline{co}(G(\overline{\Omega} \cap K_{n-1}))$ $(n \geqq 2)$ とおく。このとき $K_\infty = \bigcap_{n \geqq 1} K_n$ は closed convex set である。

条件 (A) $G : \overline{\Omega} \longrightarrow 2^X$ のとき、各 $x \in \overline{\Omega}$ に対し
$G(x)$ は closed convex set で、且つ
$K_\infty$ は compact (empty でもよい)。

$G : \overline{\Omega} \longrightarrow 2^X$ が $\overline{\Omega}$ 上 USC で、且つ条件 (A) をみたすとき、$0 \notin (I-G)(\partial\Omega)$ ならば $\deg(I-G, \Omega, 0)$ が Leray-Schauder degree の近似として定義できる。以上の仮定のもとで、次の定理が成り立つ。

定理. $G : \overline{\Omega} \longrightarrow 2^X$ に対し、$\deg(I-G, \Omega, 0) \neq 0$

ならば、$^{\exists}x \in \Omega$ such that $x \in G(x)$。

## 参考文献


[1] 野口広著「不動点定理」共立出版

[2] 河田敬義編「位相幾何学」岩波

[3] 中岡稔著「不動点定理とその周辺」岩波

[4] 田村一郎著「トポロジー」岩波全書

[5] 小松、中岡、菅原著「位相幾何学 I」岩波

[6] 中岡稔著「位相数学入門」朝倉

[7] Lefschetz, S : Introduction to topology. Princeton U. P. 1949.

[8] Milnor, J : Topology from the differentiable view point. Virginia. 1965.

[9] Brown, R : The Lefschetz fixed point theorem. Scott. 1971.

[10] 二階堂副包著「現代経済学の数学的方法」岩波

[11] Webb, J. R. L. : "On degree theory for multivalued mappings and applications." Bolletino U.M.I. vol 9. 1974. pp. 137–158.

[12] Nussbaum, R. D. : "The Fixed point index for local condensing maps". Ann. Mat. Pura. Appl.

vol. 89. 1971. pp. 217–258.

[13] Nirenberg, L.: Topics in nonlinear functional analysis. (Courant Institute of Mathematical Sciences) New York Univ. 1973-1974.