数理解析研究所講究録
第 410 巻 1980 年 18-27

不確定特異点をもつ規則的に双曲型の方程式

東大理　　打越　敬祐

§0. 序

$(t,x)\in R\times R^n$として，$t=0$で退化した偏微分作用素

$$P=\left(t^q\frac{\partial}{\partial t}\right)^m+\sum_{\substack{i+|\alpha|\le m\\ i\ne m}}a_{i\alpha}(t,x)\left(t^{q-1}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^i$$

を考える。$q\geqq 1$は整数で，$q=1$のとき確定特異点型，$q\geqq 2$のとき不確定特異点型の作用素と呼ぶことにする。確定特異点型の作用素については，少し条件が違うが，多くの人々によって詳しく調べられている。その際，例えば大島[3]では，まず$t=0$に台をもつ超函数への作用を調べ，Pに対する超函数解の構造が調べられる。ここでは，不確定特異点型の作用素に対しても，大島先生の議論を拡張することを試みる。まず常微分作用素について，考え方を説明する。

§1. 常微分作用素の場合

$A(t)$は，$t=0$で正則な$m\times m$行列として，

$$P = \left(t^q \frac{d}{dt}\right) + A(t)$$

なる作用素を考える。ここで $q \geqq 1$ は整数とする。P が，$t=0$ で正則な函数の空間にどう作用するかという問題は，柏原[1]の中で明快に解かれている。即ち，

(Th 1)　　(柏原)

1)　$q=1$ とし，$A(0)$ の固有値 $\notin \{0, -1, -2, \cdots\}$ とすると，

$$P : (\mathcal{O}_0)^m \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_0)^m$$

但し $\mathcal{O}_0$ は $t=0$ で正則な函数の芽の空間，$(\mathcal{O}_0)^m$ はその m-ベクトル。

2)　$q \geqq 2$ とし，$\det A(0) \neq 0$ とすると，

$$0 \to (\mathcal{O}_0)^m \xrightarrow[P]{} (\mathcal{O}_0)^m \longrightarrow \mathbb{C}^{m(q-1)} \to 0$$

は完全。

1)はよく知られているが，2)は多分本質的に柏原先生の結果だろう。証明は略するが，証明の際，次の命題が鍵となる。

(Prop 1)　　(柏原)

$$t^N\mathcal{O}(r) = \left\{ \sum_{j \geqq N} t^j f_j \,;\ f_j \in \mathbb{C},\ \sup_j |f_j| r^{-j} < \infty \right\},$$

$$t^N\hat{\mathcal{O}}(r) = \left\{ \sum_{j \geqq N} t^j f_j \,;\ f_j \in \mathbb{C},\ \sup_j |f_j| r^{-j} j^{-j} < \infty \right\}$$

ここで $N \geqq 0$ は整数で，$r > 0$ とする。このとき，r が十分小さく，N が十分大きければ，次の系列は完全であ

る:

$$0 \to (t^N \tilde{\mathcal{O}}(r))^m \xrightarrow[P]{} (t^N \mathcal{O}(r))^m \to \mathbb{C}^{m(q-1)} \to 0$$

この命題から，$r \downarrow 0$として帰納極限をとれば，(常微分作用素の場合は）(Th 1)が得られるのである。

次に(Th 1)の dual を考える。$\mathcal{B}[0]$を，原点に台をもつ佐藤超函数の空間とする。Pの形式的共役P^* に対し，(Th 1) の 1)の条件の下で

$$0 \to (\mathcal{B}[0])^m \xrightarrow[P^*]{\simeq} (\mathcal{B}[0])^m \to 0$$

2)の条件の下で

$$0 \to \mathbb{C}^{m(q-1)} \to (\mathcal{B}[0])^m \xrightarrow[P^*]{} (\mathcal{B}[0])^m \to 0$$

は完全になる。更にこのことから，小松[2]によって調べられた，P^*に対する佐藤超函数解の構造の別証明が得られる。即ち，この2つの完全列から，層$\mathcal{B}$の軟弱性を使って，次のことがわかる。

(Th 2)　　(小松)

(Th 1) の条件 1)の下で，

$$0 \to \mathbb{C}^{2m} \to \mathcal{B}^m \xrightarrow[P^*]{} \mathcal{B}^m \to 0$$

2)の下で，

$$0 \to \mathbb{C}^{(q+1)m} \to \mathcal{B}^m \xrightarrow[P^*]{} \mathcal{B}^m \to 0$$

は完全である。

この議論を，偏微分作用素にも拡張したい。実際，確定特異点型（あるいはFuchs型）の偏微分作用素に対する多くの人々の研究は，このような議論から出発している。不確定特異点型の作用素については，まだ殆ど何も分かっておらず，ここで述べる議論も不十分な点がある。しかし次節で一応の結果を説明する。

§2. 不確定特異点をもつ規則的に双曲型な方程式.

$(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$として，$m$階の単独方程式.

$$P=(t^q\partial_t)^m+\sum_{\substack{i+|\alpha|\le m\\ i\ne m}}a_{i\alpha}(t,x)(t^{q-1}D_x)^\alpha(t^q\partial_t)^i$$

を考える。$q\geqq 1$は整数とし，$\partial_t=\partial/\partial t$，$D_x=-\sqrt{-1}\,\partial/\partial x$，そして$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$に対し

$$(t^{q-1}D_x)^\alpha=(t^{q-1}D_{x_1})^{\alpha_1}\cdots(t^{q-1}D_{x_n})^{\alpha_n}$$

である。このような作用素に対し，前節の(Th 1)のような結果を得たい。しかしそれができなかったので，(Th 1)より少し悪い，(Prop 1)をこの場合に拡張する。まず

$$t^N\mathcal{O}(r;H^s)=\left\{\sum_{j\geqq N}t^jf_j(x)\ ;\ f_j(x)\in H^s(\mathbb{R}^n),\ \|f_j\|_{H^s}\leqq {}^\exists c\,r^{-j}\right\}$$

$$t^N\hat{\mathcal{O}}(r;H^s)=\left\{\sum_{j\geqq N}t^jf_j(x)\ ;\ f_j(x)\in H^s(\mathbb{R}^n)\ \ \|f_j\|_{H^i}\leqq {}^\exists c\,r^{-j}/j^{s-i}\ \text{for}\ i=0,\cdots,s\right\}$$

とおく。但し $s \geq 0$ は整数で，$H^s(\mathbb{R}^n)$ は通常の，s 階のSobolev空間である。これらは，$H^s(\mathbb{R}^n)$-値の正則函数の空間である。P の係数 $a_{i\alpha}(t, x)$ は，t について正則で，

$$a_{i\alpha}(t, x) = \sum_{j \geq 0} t^j a_{i\alpha j}(x)$$

$$\begin{cases} a_{i\alpha j}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \| a_{i\alpha j} \|_{L^\infty} \leq {}^\exists a\, {}^\exists R^{-j} \end{cases}$$

とする。更に，"規則的な双曲性" を仮定する：

(仮定)

$(\tau, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ の多項式

$$\tau^m + \sum_{\substack{i+|\alpha|=m \\ i \neq m}} a_{i\alpha}(0, x)\, \xi^\alpha \tau^i = 0$$

の根を $\tau = \tau_1(x, \xi), \cdots, \tau_m(x, \xi)$ とするとき，$\xi \in \mathbb{R}^n$ なら $\tau_j \in \sqrt{-1}\,\mathbb{R}$ $(1 \leq {}^\forall j \leq m)$ であって，

1° $\displaystyle \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\xi|=1}} |\tau_j(x, \xi) - \tau_{j'}(x, \xi)| \geq {}^\exists d > 0$ for ${}^\forall j \neq {}^\forall j'$

2° $\displaystyle \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\xi|=1}} |\tau_j(x, \xi)| \geq {}^\exists d > 0$ for ${}^\forall j$

であるとする。

このとき，(Prop. 1)の，偏微分作用素への拡張として，次のことがわかる。

(Prop 2)

rを十分小さく，Nを十分大きくとれば，次の系列は完全になる:

$$0 \to t^N \tilde{\mathcal{O}}(r;H^m) \xrightarrow{P} t^N \mathcal{O}(r;H^0) \to \bigoplus_{m(q-1)} H^0(\mathbb{R}^n) \to 0.$$

(証明の概略)

Pに対し，$P_0 = (t^q\partial_t)^m + \sum_{i+|\alpha|=m} a_{i\alpha}(0,x)(t^{q-1}D_x)^\alpha (t^q\partial_t)^i$

とおく。P_0は，t変数に関する特異積分作用素を使って，次の1階の$m\times m$行列に変換される:

(1) $$L = t^q\partial_t + t^{q-1}A(x,D_x)$$

ここで$A(x,D_x)$はx変数の1階の特異積分作用素。Lは，

(2) $$L:\left(t^N\tilde{\mathcal{O}}(r;H^1)\right)^m \to \left(t^N\mathcal{O}(r;H^0)\right)^m$$

と作用する。この空間で

(3) $$LU \equiv F \pmod{\bigoplus_{j=N}^{N+q-2} t^j \left(H^0(\mathbb{R}^n)\right)^m}$$

なる方程式を考える。U, Fを$U=\sum_{j\geq N} t^j U_j(x)$, $F=\sum_{j\geq N} t^j F_j(x)$のようにTaylor展開してやると，これは形式的に

(4) $$\left(j + A(x,D_x)\right)U_j(x) = F_{j+q-1} \qquad j \geq N$$

と書ける。Nが十分大きいとき，(4)はいつでも解けて，

$$\begin{cases} \|U_j\|_{H^1} \leq {}^\exists C\,\|F_{j+q-1}\|_{H^0} \\ \|U_j\|_{H^0} \leq \dfrac{{}^\exists C}{j}\|F_{j+q-1}\|_{H^0}\end{cases}$$

なる評価をみたし，結局(3)の解が一意的に決まる。もとのスカラーの方程式に戻って，

$\forall f \in t^N \mathcal{O}(r; H^0(\mathbb{R}^n))$に対し，$\exists^1 u \in t^N \tilde{\mathcal{O}}(r; H^m(\mathbb{R}^n))$があって，

$$P_0 u \equiv f \quad \left(\bmod \sum_{j=N}^{N+m(g-1)-1} t^j \otimes H^0(\mathbb{R}^n)\right)$$

をみたし，$u = \sum_{j \geq N} t^j u_j(x)$，$f = \sum_{j \geq N} t^j f_j(x)$とすれば，

$$\|u_j\|_{H^i} \leq \frac{\exists C}{j^{m-i}} \|f_{j+m(g-1)}\|_{H^0} \qquad i < 0, \cdots, m$$

なる評価を得る。今，$P - P_0$の分は無視したが，この評価により，その誤差は逐次近似法で修正できて，結局，$\forall f \in t^N \mathcal{O}(r; H^0(\mathbb{R}^n))$に対し，$\exists^1 u \in t^N \tilde{\mathcal{O}}(r; H^m(\mathbb{R}^n))$があって，

$$P u \equiv f \quad \left(\bmod \sum_{j=N}^{N+m(g-1)-1} t^j \otimes H^0(\mathbb{R}^n)\right)$$

をみたす。 Q.E.D.

(Cor.)

rが十分小さく，Nが十分大きいとき，

$$0 \to \bigoplus^{m(g-1)} H^0(\mathbb{R}^n) \to \left(t^N \mathcal{O}(r; H^0)\right)' \xrightarrow[P^*]{} \left(t^N \tilde{\mathcal{O}}(r; H^m)\right)' \to 0$$

は完全である。

この(Cor.)の意味は次の通りである。$\mathcal{O}(r; H^s) = t^0 \mathcal{O}(r; H^s)$，$\tilde{\mathcal{O}}(r; H^s) = t^0 \tilde{\mathcal{O}}(r; H^s)$とする。

$$\varinjlim_{r \downarrow 0} \mathcal{O}(r; H^s) = \varinjlim_{r \downarrow 0} \tilde{\mathcal{O}}(r; H^s) = \mathcal{A}_0(H^s)$$

と書けば，$\mathcal{A}_0(H^s)$のdualは，$H^{-s}(\mathbb{R}^n)$-値の，原点に台をもつ佐藤超函数の空間である。そして，$(\mathcal{O}(r; H^s))'$や

$(\hat{\mathcal{O}}(r;H^s))'$は，それより広い(悪い)解析汎函数の空間になる。そして更に，$(t^N\mathcal{O}(r;H^s))'$や$(t^N\hat{\mathcal{O}}(r;H^s))'$は，例えば

$$f\in(\mathcal{O}(r;H^s))' \quad \text{or} \quad (\hat{\mathcal{O}}(r;H^s))'$$

なるえは$\sum_{j\geq 0}\delta^{(j)}(t)\otimes f_j(x)$，$f_j(x)\in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$の形に書けるのだが，そこで$\sum_{j=0}^{N-1}\delta^{(j)}(t)\otimes f_j(x)$は無視して考えたものの全体である。このような空間で考えれば，P^*に対する解の構造が分かる，というのが(Cor)の意味である。最後にこれを修正する。

まず$q=1$（確定特異点）のときは，

$$P^*:(t^N\mathcal{O}(r;H^0))'\xrightarrow{\sim}(t^N\hat{\mathcal{O}}(r;H^m))'$$

なる系列で，Nはrによらず一定にとれて，$r\downarrow 0$なる極限をとると，

$$P^*:(t^N\mathcal{A}_0(H^0))'\xrightarrow{\sim}(t^N\mathcal{A}_0(H^m))'$$

となる．$\delta(t)$の有限階の微分に相当する部分はここでは無視しているが，Pの係数$a_{i,\alpha}(t,x)$が，xについて緩変化(i.e. 無限遠方で，大体定数になっている)場合は，それが修正できて，次の結果を得る。

(Th 3)

$q=1$のとき，$a_{i,\alpha}(0,x)$が緩変化なら，

$$P^*:\mathcal{B}_{\{0\}}(\mathbb{R};H^0(\mathbb{R}^n))\to\mathcal{B}_{\{0\}}(\mathbb{R};H^{-m}(\mathbb{R}^n))$$

はFredholm型の作用素になる。但し，$\mathcal{B}_{\{0\}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^n))$ は$t=0$に台をもつH^s-値佐藤超函数の空間。

今度は$q \geqq 2$（不確定特異点）のときを考える。このとき，Nは，$r \downarrow 0$として一定にとれない（Nは$N \sim \frac{1}{r^{q-1}}$のorderで大きくとらなければいけない）。従って，今のところ佐藤超函数では処理できず，解析汎函数の空間でしか解の構造は分からない。$\delta(t)$の，低階の微分に関しては，係数$a_{00}(0,x)$が$\forall x \in \mathbb{R}^n$に対し，消えないときは，

$$P^*: \sum_{j=0}^{N-1} \delta^{(j)}(t) \otimes \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightleftarrows \sum_{j=0}^{N-1} \delta^{(j)}(t) \otimes \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

のように作用するので，次の結果を得る：

(Th. 4)

$q \geqq 2$とし，rが十分小さく，Nが十分大きければ，$a_{00}(0,x) \neq 0$ for $\forall x \in \mathbb{R}^n$のときは，

$$0 \to \bigoplus_{m(q-1)} H^0(\mathbb{R}^n) \to (t^N \hat{\mathcal{O}}(r; H^0))' \oplus \left(\sum_{j=0}^{N-1} \delta^{(j)}(t) \otimes \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\right)$$
$$\xrightarrow[P^*]{} (t^N \hat{\mathcal{O}}(r; H^m))' \oplus \left(\sum_{j=0}^{N-1} \delta^{(j)}(t) \otimes \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\right) \to 0$$

は完全である。

以上のことは，例えば次のような意味をもつ。偏微分作用素Pが，$t \neq 0$のところでは，通常の意味で規則的に双曲型であるとし，$t=0$では上に述べた条件を満た

すように退化しているとする。$f(t,x)$が

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & H^0(\mathbb{R}^n) \\ & \Psi & & \Psi \\ & t & \longmapsto & f(t,x) \end{array} \qquad \text{continuous}$$

なる函数なら，$t \neq 0$のところで$Pu=f$なる方程式の解uが存在することはよく知られている．uは

$$\begin{array}{cccc} u: & \mathbb{R}\setminus 0 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{R}^n) \\ & \Psi & & \Psi \\ & t & \longmapsto & u(t,x) \end{array} \qquad \text{continuous}$$

なる函数である。そして$t=0$のところで解の様子はどうなっているかは通常の函数空間では分からない。それが，先に述べたような空間にまで広げてしまえば，$t=0$まで込めて$Pu=f$をみたすように，uを$t=0$のところで修正できるのである。

参考文献

[1] 柏原正樹 偏微分方程式系の代数的研究（東大修士論文，1970）

[2] 小松彦三郎 超函数論入門（岩波書店・基礎数学）

[3] 大島利雄 確定特異点型境界値問題と表現論（上智大学講究録NO5，1979）