数理解析研究所講究録
第 410 巻 1980 年 56-66

$\Sigma\mathbb{C}$上の解析汎函数について

東大　教養　　藤本佳久

最近．正則性の概念を一般の無限次元線型位相空間に拡張して．そこでの性質が調べられている．（詳しくは［4］の分献を参照）．Martineau［3］では．それらを使って．$\mathbb{C}^n$上の正則函数の空間 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ 上の多項式的解析汎函数．正則な解析汎函数について．その性質を調べている．ここでは．もっと簡単に．一変数の多項式全体の空間にDFS位相を入れた空間ーそれを $\Sigma\mathbb{C}$ と書くーの上の正則函数の空間とその双対空間について調べる．

§1. $\Sigma\mathbb{C}$の位相的性質

まず最初に，一般の線型位相空間上の正則函数の定義を復習しておく．

定義　Eを$\mathbb{C}$上の線型位相空間とし．UをEの開集合とする．このとき．U上の函数 f が次の条件をみたすとき，正則であるという．

i) fはU上連続である。

ii) Eの中の任意の一次元アフィン部分空間Fに対して、$f|_F : U\cap F \to \mathbb{C}^n$ が、通常の意味で正則である。

<u>注意</u> Eを$\mathbb{R}$上の線型位相空間としたとき、$f : U \to \mathbb{C}$ がC^∞-級であるというのは、上の定義の条件のii)の中で、Fとして Eの有限次元部分空間をとり、正則のところをC^∞-級にかえたものである。

空間$\Sigma\mathbb{C}$をきちんと定義すると、

$$\Sigma\mathbb{C} := \varinjlim_n \{\mathbb{C}^n ; u^n_{n+1}\}$$

但し、

$$u^n_{n+1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (z_1,\cdots,z_n) & \longmapsto & (z_1,\cdots,z_n,0) \end{array} \quad 。$$

$u_n : \mathbb{C}^n \longrightarrow \Sigma\mathbb{C}$ を標準的埋め込み写像として、以下、$u_n(\mathbb{C}^n)$と$\mathbb{C}^n$を同一視して議論する。$\Sigma\mathbb{C}$の位相的双対空間を、$\Pi\mathbb{C}$と表わすことにする。

<u>注意</u> $\mathbb{C}$を$\mathbb{R}$でおきかえたものを$\Sigma\mathbb{R}$, $\Pi\mathbb{R}$とかく。また、$\Sigma\mathbb{R}^2$も同様に考えることにする。

まず、この空間$\Sigma\mathbb{C}$の位相的性質についてみよう。

I) これは、位相の入れ方から明らかに、DFS(LF)核型空間である。

II) $\Sigma\mathbb{C}$の任意の開集合はパラコンパクトである。

これを示すには、実際に任意の開被覆に対してそれの細分

である局所有限な開被覆を構成するのであるが．このとき次の事実が役に立つ．

III) $\Sigma\mathbb{C}$ は σ-コンパクト (i.e. $\Sigma\mathbb{C}$ は可算個のコンパクト集合の合併である) であり．$\Sigma\mathbb{C}$ のコンパクト集合は．ある $\mathbb{C}^n$ に含まれている。

IV) $\Sigma\mathbb{C}$ の部分集合 U が開集合であるのは．$U\cap\mathbb{C}^n$ が $\mathbb{C}^n$ で開集合であるとき．且つそのときに限る。

III) の性質により．あとで $\mathcal{O}$-係数のコホモロジー群の消滅を示すときに．パラコンパクト空間上のコホモロジー群の理論が使える。

V) 各点には凸開集合からなる基本近傍系が存在する。

§2. $\Sigma\mathbb{C}$ あるいは $\Pi\mathbb{C}$ 上の正則函数の空間

U を $\Sigma\mathbb{C}$ あるいは $\Pi\mathbb{C}$ の開集合としたとき．

$$\mathcal{O}(U) := \{U \text{ 上の正則函数全体}\}$$

とおき．各コンパクト集合上一様収束位相を入れる．

Ω を $\Sigma\mathbb{R}$ あるいは $\Pi\mathbb{R}$ の開集合としたとき．

$$\mathcal{E}(\Omega) := \{\Omega \text{ 上の無限回微分可能函数全体}\}$$

とおき．セミノルムの族 $|f|_{m,K} = \sup_{|p|\le m}\left(\sup_{x\in K}|(\partial/\partial x)^p f(x)|\right)$

で位相を入れる，但し．K は Ω のコンパクト集合，$p=(p_1,p_2,\cdots)$

$|p|=p_1+p_2+\cdots$ （p_i は非負な整数）。

準層 $\{\mathcal{O}(U)\}$, $\{\mathcal{E}(\Omega)\}$ は、各々 $\Sigma\mathbb{C}$, $\Sigma\mathbb{R}$ 上の層をなす。それを、$\mathcal{O}$, $\mathcal{E}$ とかく。

命題1　U を $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合とすると、次の線型位相空間としての同型が成りたつ；

$$\mathcal{O}(U) \cong \varprojlim_n \mathcal{O}_n(U_n) \qquad \text{FS 核型空間}$$

但し、$\mathcal{O}_n$ は $\mathbb{C}^n$ 上の正則函数のなす層とし、$U_n = U \cap \mathbb{C}^n$ とする。

上の射影極限は、制限写像 $\mathcal{O}_{n+1}(U_{n+1}) \to \mathcal{O}_n(U_n)$ に関してとったものである。

命題2　U を $\Pi\mathbb{C}$ の開集合とすると、次の線型位相空間としての同型が成りたつ：

$$\mathcal{O}(U) \cong \varinjlim_n \mathcal{O}_n(U^n)$$

但し、$U^n = p_n(U)$, p_n は $\Pi\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^n$ への projection。

注意　Ω が $\Sigma\mathbb{R}$ の開集合のときは、$\mathcal{E}(\Omega)$ に関して、命題1と同様の結果が成りたつが、Ω が $\Pi\mathbb{R}$ の開集合に対しては、代数的に、$\mathcal{E}(\Omega) \neq \varinjlim_n \mathcal{E}_n(\Omega^n)$。

$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{-x_n^2}$ $\quad (x = (x_i) \in \Pi\mathbb{R})$ は $\mathcal{E}(\Omega)$ の元であるが、右辺の元にはならない。

次に、$\Pi\mathbb{C}$ 上の指数型函数の空間を考える。

定義　$F \in \mathcal{O}(\Pi\mathbb{C})$ が指数型であるとは、ある正の定数 C とある正数 r_i が存在して、

$$|F(z)| \leq C \exp(r_1|z_1| + r_2|z_2| + \cdots) \qquad (z = (z_i) \in \Pi\mathbb{C})$$

をみたすことである。

$\Pi\mathbb{C}$ 上の指数型整函数全体を $\mathrm{Exp}(\Pi\mathbb{C})$ と書くことにする。命題2より、線型空間として $\mathrm{Exp}(\Pi\mathbb{C}) \cong \varinjlim_{K} \mathrm{Exp}^b(\Pi\mathbb{C}, K)$ が成りたつので、右辺で位相を入れる。K は $\Sigma\mathbb{C}$ のコンパクト集合を表わす。また、

$$\mathrm{Exp}^b(\Pi\mathbb{C}, K) := \{F \in \mathrm{Exp}(\Pi\mathbb{C}) : \|F\|_K < \infty\} .$$

ノルム $\|F\|_K = \sup\{|F(\zeta)|\exp(-H_K(\zeta))\}$ $\left(H_K(\zeta) = \sup_{z\in K} \mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle\right)$ によりBanach空間になる。故に、$\mathrm{Exp}(\Pi\mathbb{C})$ にはDFS位相が入る。

<u>命題3</u> 次の線型位相空間としての同型が成りたつ：

$$\mathrm{Exp}(\Pi\mathbb{C}) \cong \varinjlim \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^n)$$

但し、$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^n)$ で $\mathbb{C}^n$ 上の指数型整函数全体を表わす。

<u>§3 $\Sigma\mathbb{C}$ 上の解析汎函数</u>

U を $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合として、$\mathcal{O}(U)$ の双対空間 $\mathcal{O}'(U)$ の元を解析汎函数と呼ぶことにする。

<u>命題4</u> U を $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合(i.e. 任意の自然数 n に対して、U_n が擬凸になることと同値）ならば、

$$\mathcal{O}'(U) \cong \varprojlim_{n} \mathcal{O}'(U_n) \quad \text{（線型位相空間として）}$$

<u>定義</u> $T \in \mathcal{O}'(U)$ が U のコンパクト集合 K で支えられるとは、$U \supset W \supset K$ となる任意の開集合 W に対して、$T \in {}^t\gamma(\mathcal{O}'(W))$

となること。ここで、$r: \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(W)$ は制限写像を表わし、${}^t r$ は r の転置写像を表わす。

<u>定義</u>　$T \in \mathcal{O}'(\Sigma\mathbb{C})$ のフーリエ・ボレル変換を、

$$\hat{T}(\zeta) := \langle T_z, e^{\langle z, \zeta \rangle} \rangle \quad (z \in \Sigma\mathbb{C},\ \zeta \in \Pi\mathbb{C})$$

で定義する。

上の結果を組み合わせると、次の定理が得られる。

<u>定理1.</u>　$T \in \mathcal{O}'(\Sigma\mathbb{C})$ がコンパクト集合 $K (\subset \mathbb{C}^n)$ で支えられるならば、$M(\zeta) = \hat{T}(\zeta)$ は $\Pi\mathbb{C}$ 上の整函数であり、任意の正数 δ に対して、ある正の定数 C_δ が存在して、次の不等式をみたす：(*)　$|M(\zeta)| \leq C_\delta \exp(H_K(\zeta) + \delta\|\zeta\|_n)$；

逆に、$K (\subset \mathbb{C}^n)$ をコンパクト凸集合とし、$M(\zeta)$ を任意の正数 δ に対して (*) をみたすような $\Pi\mathbb{C}$ 上の整函数であるとする。このとき、K で支えられるような、$T \in \mathcal{O}'(\Sigma\mathbb{C})$ が存在して、$\hat{T}(\zeta) = M(\zeta)$ となる。但し $\|\zeta\|_n = (|\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2)^{1/2}$ $(\zeta = (\zeta_i) \in \Pi\mathbb{C})$.

<u>系.</u>　フーリエ・ボレル変換は $\mathcal{O}'(\Sigma\mathbb{C})$ から $\mathrm{Exp}(\Pi\mathbb{C})$ の上への線型位相空間としての同型を与える。

これは、$\{e^{\langle z, \zeta \rangle}\}$ が $\mathcal{O}(\Sigma\mathbb{C})$ において稠密な部分空間となることより単射が示せ、連続であることも示せるから、あとは DFS空間に対する閉グラフ定理より出る。

<u>§4. $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合の $\mathcal{O}$-係数のコホモロジー群の消滅</u>

Dineen [1] では、finite open topology を持つ線型位相空間において、任意の擬凸開集合に対する $\mathcal{O}$-係数の1次コホモロジー群の消滅を示している。ここでは、$\Sigma\mathbb{C}$（この位相は、finite open Topology と一致している）において、$\mathcal{O}$ の柔軟分解を使って、$\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合 U に対して $H^p(U, \mathcal{O}) = 0$ $(p \geqq 1)$ を示す。

命題5　$\mathcal{E}$ は $\Sigma\mathbb{R}$ 上の fine sheaf である。

これを示すには、§1 での位相の注意に従って、実際に、局所有限な開被覆に対して1の分解を構成すればよい。

[1] に従って、$\mathcal{E}^{0,p}(U)$ と $\bar\partial$-作用素を考えよう。
U を $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合として、$\mathcal{E}^{0,p}(U)$ で次の形のもの全体を表わすことにする；

$$f = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\, d\bar z_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{i_p} \quad , \; f_{i_1\cdots i_p} \in \mathcal{E}(U)$$

$z = (z_i) \in \Sigma\mathbb{C}$.、但し、$\mathcal{E}^{0,0}(U) = \mathcal{E}(U)$ とおく。

$\bar\partial$-作用素を次の様に定義する。

$$\bar\partial f := \sum_{i_1<\cdots<i_p} \bar\partial\,(f_{i_1\cdots i_p}\, d\bar z_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{i_p})$$

$$= \sum_{i_1<\cdots<i_p} \Big\{ \sum_{j=0}^{i_1-1} \frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial \bar z_j}\, d\bar z_j \wedge d\bar z_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{i_p}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i_k<j<i_{k+1}} (-1)^k \frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial \bar z_j}\, d\bar z_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{i_k}\wedge d\bar z_j\wedge d\bar z_{i_{k+1}}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{i_p}$$

$$+ (-1)^p \sum_{j>i_p} \frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial \bar z_j}\, d\bar z_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{i_p}\wedge d\bar z_j \Big\}$$

このとき、次の命題が成りたつ。

命題6　Uを$\Sigma\mathbb{C}$の擬凸開集合とする。

$$0 \to \mathcal{O}(U) \to \mathcal{E}^{0,0}(U) \to \mathcal{E}^{0,1}(U) \to \cdots$$

は完全列である。

これは、$\mathcal{O}(U) \cong \varprojlim_n \mathcal{O}_n(U_n)$、$\mathcal{E}(U) \cong \varprojlim_n \mathcal{E}_n(U_n)$ と、制限写像、$\mathcal{O}_{n+1}(U_{n+1}) \to \mathcal{O}_n(U_n)$ が全射であることから導かれる。

§1 の V) により、

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E}^{0,0} \to \mathcal{E}^{0,1} \to \cdots$$

が、$\mathcal{O}$の$\Sigma\mathbb{C} \cong \Sigma\mathbb{R}^2$上の柔軟分解を与えることが分る。

以上をまとめると、

定理2　Uを$\Sigma\mathbb{C}$の擬凸開集合とする。このとき、

$$H^p(U, \mathcal{O}) = 0 \quad (p \geq 1)$$

が成りたつ。

注意　この結果は、次の§の Grothendieck の命題からも導かれる。

§5. $\Sigma\mathbb{C}$の subvariety のコホモロジー群の消滅

$\Sigma\mathbb{C}$の中の、subvariety という概念を導入する。

定義　Dを$\Sigma\mathbb{C}$の開集合とする。

Dの部分集合VがDの subvariety であるとは、任意の$z \in D$

に対して. zの近傍Uと. U上の正則函数の族Fが存在して.

$$V \cap U = \{z \in U : \quad f(z)=0 \quad f \in F\}$$

かつ. 任意の自然数nに対して. $V_n \cap U_n$ が. $F_n=\{f|_{\mathbb{C}^n} ; f \in F\}$の有限個の元の零点で表わされているときをいう.

WをDの開集合として.

$$\mathcal{I}_V(W) = \{f \in \mathcal{O}(W) : f(z)=0 \quad z \in W \cap V\}$$

とおくと. 準層$\{\mathcal{I}_V(W)\}_{W \subset D}$は層をなすから. それを$\mathcal{I}_V$と書き. Vのイデアルの層と呼ぶことにする.

$\mathcal{I}_{V_n}$で, D_nにおけるV_nのイデアルの層を表わすことにすると. $\mathcal{I}_V(W) \cong \varprojlim_n \mathcal{I}_{V_n}(W_n)$ が成りたつから.

命題7. Dを$\Sigma\mathbb{C}$の開集合とし. VをDのsubvarietyとする。このとき. $\mathcal{I}_V$は, D上の層$\{u_{n*}\mathcal{I}_{V_n}\}$の射影極限になっている. 但し. $u_{n*}\mathcal{I}_{V_n}$は. u_nによる$\mathcal{I}_{V_n}$の direct image を表わす.

$\mathcal{I}_V$係数のコホモロジー群の消滅を示すために, 次の射影系に関する命題を引用する.

命題8 (Grothendieck (EGA) III 命題13.2.3)

Xを位相空間, $\{\mathcal{F}_k\}$をX上の可換群の層の射影系, $\mathcal{F} = \varprojlim_k \mathcal{F}_k$とし、次の条件をみたすとする。

i) Xの位相を定める基底$\mathcal{B}$が存在して. 任意の$U \in \mathcal{B}$と. $p \geq 0$ に対して. 射影系$\{H^p(U, \mathcal{F}_k)\}$が (ML)条件をみたす

ii) 任意の $x \in X$ と $p > 0$ に対して

$$\varprojlim_{U} \left(\varprojlim_{k} H^p(U, \mathcal{F}_k) \right) = 0$$

が成りたつ．但し，U は β に属する x の近傍全体を動く．

iii) 射影系 $\{\mathcal{F}_k\}$ を定義する準同型写像 $\nu_{hk}: \mathcal{F}_h \to \mathcal{F}_k$ $(h \geq k)$ が全射である．

このとき，もし，$p > 0$ に対して，射影系 $\{H^{p-1}(X, \mathcal{F}_k)\}$ が(ML)条件をみたせば，

$$h_p : H^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim H^p(X, \mathcal{F}_k)$$

は全単射である．

注意　射影系 $(A_\alpha, f_{\alpha\beta})$ に対して，次の条件が(ML)条件である。

(ML)　任意の α に対して，$\beta \geq \alpha$ をみたす β が存在して，

$$f_{\alpha\gamma}(A_\gamma) = f_{\alpha\beta}(A_\beta) \qquad (\forall \gamma \geq \beta) \quad 。$$

上の命題を使うと，次の命題がえられる．

命題9　D を $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合とし，V を D の subvariety とする。このとき，$H^p(D, \mathcal{J}_V) = 0$ $(p \geq 1)$ が成りたつ．

次の商層を考えよう．

$${}_V\tilde{\mathcal{O}}_D := \mathcal{O}_D / \mathcal{J}_V \quad とおく．$$

$z \in D - V$ ならば，$({}_V\tilde{\mathcal{O}}_D)_z = 0$ だから，$\mathcal{O}_V := {}_V\tilde{\mathcal{O}}_D|V$ とおき，V 上の正則函数の層と呼ぶ．

この層 $\mathcal{O}_V$ に対して，次の定理がえられる．

定理3　D を $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合とし，V を D の subvariety

とする。このとき．

$$H^p(V, \mathcal{O}_V) = 0 \qquad (p \geqq 1)$$

が成りたつ．

これを示すには．次の D 上の層の完全列を考える．

$$0 \to \mathcal{I}_V \to \mathcal{O}_D \to {}_V\widetilde{\mathcal{O}}_D \to 0$$

定理2と命題9より．$H^p(D, \mathcal{O}_D) = H^p(D, \mathcal{I}_V) = 0$ $(p \geqq 1)$ が分っているから．長完全列より．$H^p(V, \mathcal{O}_V) = H^p(D, {}_V\widetilde{\mathcal{O}}_D) = 0$ $(p \geqq 1)$ が従う．

文献．

[1]. Dineen, S, Sheaves of holomorphic functions on infinite dimensional vector spaces, Math. Ann. 202 (1973), 331-345.

[2] Fujimoto, Y, Analytic functionals on a countably infinite dimensional topological vector space (to appear).

[3] Martineau, A, Fonctionnelles analytiques non linéaires et représentation de Polya pour une fonction entière de n variable de type exponentiel Lec. Notes in Math. 205, Springer pp. 125-165.

[4] Noverraz, P, Pseudo-Convexité, Convexité Polynomiale et Domaines d'Holomorphie en Dimension Infinie, Notas de Matematica. 3. North-Holland (1973).