数理解析研究所講究録
第 410 巻 1980 年 67-75

リー球面上の解析汎函数

上智大 理工　　森本 光生

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| = 1 \}$ を単位円周とする。$L^2(S^1)$ で S^1 上の２乗可積分函数のなすヒルベルト空間を表わす。内積を，$(f, g)_{L^2(S^1)} = (f, \bar{g})_{S^1}$ とおく。$(\ ,\ )_{S^1}$ は，次式で定義される双一次形式である。

(1)　$$(f, g)_{S^1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) \, d\theta .$$

$\mathcal{H}^{(m)}(S^1)$ で，指数函数 $e^{im\theta}$ で生成される $L^2(S^1)$ の１次元部分空間を表わせば，ヒルベルト空間 $L^2(S^1)$ は，直和分解

(2)　$$L^2(S^1) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^{(m)}(S^1)$$

され，$L^2(S^1)$ より $\mathcal{H}^{(m)}(S^1)$ の上への直交射影は，

(3)　$$f(e^{i\theta}) \longmapsto c_m e^{im\theta}$$

で与えられる。ここで

(4)　$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-im\theta} \, d\theta$$

は，f の m 次のフーリエ成分である。

もう少し一般に，S^{n-1}を$n-1$次元の単位球面を表わす。$d\Omega_n$で，S^{n-1}上の不変測度，Ω_nでS^{n-1}の“面積”を表わす。$L^2(S^{n-1})$で，S^{n-1}上の2乗可積分函数のなすヒルベルト空間を表わし，その内積を$(f, g)_{L^2(S^{n-1})} = (f, \bar{g})_{S^{n-1}}$で表わす。ここで，$(\ ,\ )_{S^{n-1}}$は，次式で定義される双一次形式である。

(5) $$(f, g)_{S^{n-1}} = \frac{1}{\Omega_n}\int_{S^{n-1}} f(\omega)g(\omega)\,d\Omega_n(\omega).$$

$\mathcal{H}^k(S^{n-1})$で，k次球面調和函数のなす空間を表わせば，ヒルベルト空間$L^2(S^{n-1})$は，次のように直和分解される。

(6) $$L^2(S^{n-1}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^k(S^{n-1}),\quad \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

(2)との関係は，次の通りである。

$$\mathcal{H}^k(S^1) = \mathcal{H}^{(k)}(S^1) \oplus \mathcal{H}^{(-k)}(S^1),\quad k \neq 0.$$

さて，$L^2(S^{n-1})$から，直和成分$\mathcal{H}^k(S^{n-1})$の上への直交射影は，

(7) $$f(\omega) \longmapsto S_k(f;\omega)$$

で与えられる。但し，

(8) $$S_k(f;\omega) = \frac{N(n,k)}{\Omega_n}\int_{S^{n-1}} f(\tau)\,P_k(n;\langle\omega,\tau\rangle)\,d\Omega_n(\tau)$$

で，$N(n,k) = \dim \mathcal{H}^k(S^{n-1})$，$P_k(n;t)$は，$n$次

元 k 次のルジャンドル多項式である。

以上のことは，古典的であり，例えば，C. Müller: Spherical Harmonics, Lecture Notes in Math. 17 1966, Springer に，詳しく書かれている。

この講演では，リー球面 Σ^n の場合を考察する。リー球面 Σ^n は，

(9) $\quad \Sigma^n = \{ e^{i\theta}\omega ;\ \theta \in \mathbb{R},\ \omega \in S^{n-1} \}$

で定義される $\mathbb{C}^n$ 内のコンパクト集合で，実解析的多様体の構造をもっている。$\Sigma^1 = S^1$ であり，$\Sigma^2 \approx S^1 \times S^1$ である。$L^2(\Sigma^n)$ で，Σ^n 上の測度 $d\theta\, d\Omega_n(\omega)$ に関して2乗可積分な函数のなすヒルベルト空間を表わし，その内積を，$(f, g)_{L^2(\Sigma^n)} = (f, \overline{g})_{\Sigma^n}$ とおく。$(\ ,\ )_{\Sigma^n}$ は次式で定義される双一次形式である。

(10) $\quad (f, g)_{\Sigma^n} = \dfrac{1}{\pi\, \Omega_n} \displaystyle\int_0^{\pi} \int_{S^{n-1}} f(e^{i\theta}\omega)\, g(e^{i\theta}\omega)\, d\theta\, d\Omega_n(\omega).$

いま，集合 Λ を

(11) $\quad \Lambda = \{ (m, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ ;\ m \equiv k \pmod 2 \}$

とおき，$(m, k) \in \Lambda$ に対し，

(12) $\quad \mathcal{H}^{m,k}(\Sigma^n) = \{ e^{im\theta} S_k(\omega) ;\ S_k \in \mathcal{H}^k(S^{n-1}) \}$

で，$L^2(\Sigma^n)$ の有限次元部分空間を定義する。ヒルベルト空間 $L^2(\Sigma^n)$ は，次のように直和分解される：

(13) $\quad L^2(\Sigma^n) = \bigoplus_{(m,k)\in\Lambda} \mathcal{H}^{m,k}(\Sigma^n).$

$L^2(\Sigma^n)$から$\mathcal{H}^{m,k}(\Sigma^n)$の上への直交射影は,

(14) $$f \longmapsto e^{im\theta} S_{m,k}(f;\omega),$$

(15) $$S_{m,k}(f,\omega)$$
$$= \frac{N(n,k)}{\pi\,\Omega_n}\int_0^\pi \int_{S^{n-1}} f(e^{i\theta}\tau)\,e^{-im\theta} P_k(n;\langle\omega,\tau\rangle)\,d\theta\,d\Omega_n(\tau)$$

で与えられる. 函数 $S_{m,k}(f;\omega)$は, (m,k)フーリエ・球面調和成分(略して, (m,k)-成分)と呼ばれる.

さて, $R>1$ に対し

(16) $$K^\circ_{R,R} = \{z\in\mathbb{C}\,;\ R^{-1} < |z| < R\}$$

とおけば, $\{K^\circ_{R,R}\,;\ R>1\}$は S^1の複素近傍の基本系である。$\tilde{S}^{n-1}$で, 複素球面を表わす。すなわち,

(17) $$\tilde{S}^{n-1} = \{z\in\mathbb{C}^n\,;\ z^2 = 1\},$$

ここで $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$, $z^2 = z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$ である。$\mathbb{C}^n$上のリーノルム$L(z)$は, 次式で定義される.

(18) $$L(z)^2 = \|z\|^2 + [\,\|z\|^4 - |z^2|^2\,]^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\|z\|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2\right).$$

$L(z)$は, $\mathbb{C}^n$上のノルムである。$R>1$に対し

(19) $$\tilde{S}^{n-1}(R) = \{z\in\tilde{S}^{n-1}\,;\ L(z)<R\}$$

とおけば $\{\tilde{S}^{n-1}(R)\,;\ R>1\}$ は, S^{n-1} の複素近傍の基本系をなすことが証明できる. リー球面の複素近傍を定めるために, $R>1$に対し

(20) $\tilde{V}(R, R; R)$

$$= \{ z \in \mathbb{C}^n ; R^{-2} < |z^2| < R^2, \quad L(z)^2 < |z^2| R^2 \}$$

とおく。$\{ \tilde{V}(R, R; R) ; R > 1 \}$が，リー球面$\Sigma^n$の複素近傍の基本系となることが，$S^1$，$S^{n-1}$の場合の結果より，証明できる。

$C^\infty(\Sigma^n)$で，Σ^n上のC^∞函数の全体，$\mathcal{A}(\Sigma^n)$で，Σ^n上の実解析的函数の全体を表わす。$\mathcal{O}(\tilde{V}(R, R; R))$で，$\mathbb{C}^n$の開集合$\tilde{V}(R, R; R)$上の整型函数の全体を表わす。通常のように，これらの空間に位相を入れ，局所凸線形位相空間とする。このとき，次の連続な包含関係がある。

(21) $\mathcal{O}(\tilde{V}(R, R; R)) \hookrightarrow \mathcal{A}(\Sigma^n) \hookrightarrow C^\infty(\Sigma^n) \hookrightarrow L^2(\Sigma^n).$

ここで，第1の包含関係は，制限写像により定義される。

$\mathcal{D}'(\Sigma^n)$でΣ^n上のシュワルツ超函数の空間（すなわち，$C^\infty(\Sigma^n)$の双対空間），$\mathcal{B}(\Sigma^n)$でΣ^n上の佐藤超函数の空間（すなわち，$\mathcal{A}(\Sigma^n)$の双対空間）を表わす。空間$\mathcal{O}(\tilde{V}(R, R; R))$の双対空間を，$\mathcal{O}'(\tilde{V}(R, R; R))$とおき，その元を，一般に，解析汎函数という。(21)の双対写像により，次の連続な包含関係が定義できる。

(22) $\mathcal{O}'(\tilde{V}(R, R; R)) \hookleftarrow \mathcal{B}(\Sigma^n) \hookleftarrow \mathcal{D}'(\Sigma^n) \hookleftarrow L^2(\Sigma^n).$

解析汎函数$f \in \mathcal{O}'(\tilde{V}(R, R; R))$に対しても，$(m, k)$成分$S_{m,k}(f, \omega)$が，(15)式に類似の式で定義できる。

この講演の第1の主張は，（21）と（22）に表われたすべての函数（あるいは超函数）空間が，(m, k) 成分の振舞によって特徴づけられるということである。結果をまとめれば次の表のようになる。（上から下へ，函数空間は大きくなる。）

$$f \in \mathcal{O}(\tilde{V}(R,R;R)) \iff \limsup \left[\| S_{m,k} \|\right]^{1/(|m|+k)} \leqq R^{-1}.$$

$$f \in \mathcal{A}(\Sigma^n) \iff \limsup \left[\| S_{m,k} \|\right]^{1/(|m|+k)} < 1$$

$$f \in C^\infty(\Sigma^n) \iff \| S_{m,k} \| \text{ は } \Lambda \text{ 上で急減小}$$

$$f \in L^2(\Sigma^n) \iff \| S_{m,k} \| \in l^2(\Lambda)$$

$$f \in \mathcal{D}'(\Sigma^n) \iff \| S_{m,k} \| \text{ は } \Lambda \text{ 上で緩増加.}$$

$$f \in \mathcal{B}(\Sigma^n) \iff \limsup \left[\| S_{m,k} \|\right]^{1/(|m|+k)} \leqq 1.$$

$$f \in \mathcal{O}'(\tilde{V}(R,R;R)) \iff \limsup \left[\| S_{m,k} \|\right]^{1/(|m|+k)} < R$$

ここで，$\limsup = \limsup\limits_{|m|+k \to \infty}$ と略した。また，

$$\| S_{m,k} \| = \| S_{m,k}(f;\omega) \|_{L^2(S^{n-1})} \text{ である。}$$

Σ^n は，第4種の E. カルタンの古典領域 $\tilde{B}$（リー球ともいう）のシロフ境界となっている。そこで $\tilde{B}$ 上の整型函数と，Σ^n 上の超函数の間には，密接な関係があると想像できる。最も簡単な場合（$n=1$）よりはじめる。

単位円板 $\tilde{B}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1 \}$ 上の整型函数 $f(z)$ は，佐藤超函数としてのトレース $T(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ をもつ。このTのフーリエ係数 c_m は，

(23) $\quad C_m = 0 \quad m < 0$

なる条件をみたす。逆に，条件（23）をみたす佐藤超函数T $\in \mathcal{B}(S^1)$ に対して，一意的に整型函数 $\tilde{f}(z) \in \mathcal{O}(\tilde{B}^1)$ が存在し，そのトレースはもとの超函数Tに一致する。この整型函数 $\tilde{f}$ は，コーシーの積分公式によって表示される：

(24) $\quad \tilde{f}(z) = (\ T(e^{i\theta}),\ (1 - e^{-i\theta}z)^{-1}\ )$,

ここで（，）は $\mathcal{B}(S^1) \times \mathcal{A}(S^1)$ 上の標準的内積を表わす。トレース作用素 $\rho : \mathcal{O}(\tilde{B}^1) \longrightarrow \mathcal{B}(S^1)$ によって，$\mathcal{O}(\tilde{B}^1)$ を $\mathcal{B}(S^1)$ の部分空間とみなすことができる。

$\tilde{B}^1[1] = \{ z \in \mathbb{C} ;\ |z| \leq 1 \}$ で，単位閉円板を表わし，その近傍で定義された整型函数の空間 $\mathcal{O}(\tilde{B}^1[1])$ を考える。トレース作用素 ρ は，$\mathcal{O}(\tilde{B}^1[1])$ を $\mathcal{A}(S^1)$ の中に1対1にうつす。コーシー積分（24）は，写像 $\gamma : f \longmapsto \tilde{f}$ を定めるが，γ は $\mathcal{A}(S^1)$ を $\mathcal{O}(\tilde{B}^1[1])$ の上に写し，トレース写像 ρ の左逆（すなわち，$\gamma \circ \rho = id$）である。双対写像 γ^* により $\mathcal{O}'(\tilde{B}^1[1])$ は $\mathcal{B}(S^1)$ の部分空間と見なせる。超函数 $T \in \mathcal{B}(S^1)$ が，$\gamma^* \mathcal{O}'(\tilde{B}^1[1])$ に入るための必要十分条件は

(25) $\quad C_m = 0 \quad m > 0$

である。

以上に述べた $\tilde{B}^1$ 又は $\tilde{B}^1[1]$ と $S^1 = \Sigma^1$ の関係が，高次

元でも成立することを以下に述べる。リー球 $\tilde{B}=\tilde{B}^n$ を

(26) $$\tilde{B}=\tilde{B}^n=\{z\in\mathbb{C}^n;\ L(z)<1\}$$

で定める。ここで $L(z)$ は，リー・ノルム (18) である。$\tilde{B}$ は，E-カルタンの第4種の古典領域で，Σ^n は $\tilde{B}^n$ のシロフ境界であることが知られている。例えば，L. H. Hua の教科書 Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in Classical Domains, Moskow, 1959 を参照。

リー球 $\tilde{B}^n$ 上の整型函数 $f(z)$ は，Σ^n 上に超函数の意味のトレース $T(e^{i\theta}\omega)\in\mathcal{B}(\Sigma^n)$ をもつ。このトレース T は，

(27) $$S_{m,k}(T,\omega)=0 \qquad m<k$$

をみたす。逆に，もしも $T\in\mathcal{B}(\Sigma^n)$ が条件 (27) をみたせば，一意的に整型函数 $\tilde{f}(z)\in\mathcal{O}(\tilde{B}^n)$ が存在して，T は $\tilde{f}$ のトレースになる。この整型函数 $\tilde{f}(z)$ は，コーシー・華 (Hua) の積分公式で表示される：

(28) $$\tilde{f}(z)=\left(T(e^{i\theta}\omega),\ ((\omega-e^{-i\theta}z)^2)^{-n/2}\right),$$

ここで，$(\ ,\ )$ は $\mathcal{B}(\Sigma^n)\times\mathcal{A}(\Sigma^n)$ 上の標準的双一次形式である。このようにして，トレース作用素 $\rho:\mathcal{O}(\tilde{B}^n)\longrightarrow\mathcal{B}(\Sigma^n)$ を用いて，$\mathcal{O}(\tilde{B}^n)$ を $\mathcal{B}(\Sigma^n)$ の部分空間と考えることができる。

$\tilde{B}^n[1]=\{z\in\mathbb{C}^n;\ L(z)\le 1\}$ で閉リー球を表わし，整型

函数の芽の空間 $\mathcal{O}(\tilde{B}^n[1])$ を考える．このとき，トレース作用素 ρ は，$\mathcal{O}(\tilde{B}^n[1])$ を1対1に $\mathcal{A}(\Sigma^n)$ の中にうつす．$f \in \mathcal{A}(\Sigma^n)$ に対し $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{B}^n[1])$ をコーシー華の公式により定めれば，$\gamma : f \longmapsto \tilde{f}$ は ρ の左逆（$\gamma \circ \rho = id$）である。故に，双対写像 $\gamma^* ; \mathcal{O}'(\tilde{B}^n[1]) \longrightarrow \mathcal{B}(\Sigma^n)$ は1対1である。そして，$T \in \mathcal{B}(\Sigma^n)$ が $\gamma^* \mathcal{O}'(\tilde{B}^n[1])$ に入るための必要条件は，

(29) $\qquad S_{m,k}(T;\omega) = 0 \qquad m > -k$

である．

以上，私が，リー球面上の函数あるいは超函数のフーリエ・球面調和展開に関して得た結果，第4種の古典領域の函数論の結果などの概略を述べた。詳しい証明は，Analytic Functionals on the Lie Sphere と題して，Tokyo J. Math Vol 3. No. 1 に発表の予定である。

また，この報告で述べたような結果は，他の型の古典領域に対しても証明できると思われる。これについては，これから考えたいと思っている。

—以上—