数理解析研究所講究録
第 410 巻 1980 年 88-90

確定特異点型楕円型方程式に対する境界値問題について

東大 理　片岡清臣

本稿の目的は非特性境界値問題の理論を確定特異点型境界値問題に対して拡張する最初の試みとして，楕円的な方程式の解の境界値達の間の関係を求める事にある。解析的な確定特異点型方程式に対する組織的な研究は，柏原ー大島によってなされたが，その中では解の境界値を定義する事が中心課題であり，解の境界値が満すべき関係などについてはふれられていない。

主定理　$\mathbb{R}^n$ の原点の近傍で定義された解析的微分作用素 $P(x, D_x)$ が $\{x \in \mathbb{R}^n ; x_1 = 0\}$ に沿って確定特異点型，かつ楕円型であるとする。すなわち，

$$P(x, D_x) = \sum_{\substack{|J| \leq m \\ J \geq 0}} a_J(x) (x_1 D_{x_1})^{j_1} \cdot (x_1 D_{x'})^{J'} \qquad (D_{x_j} = \partial/\partial x_j)$$

と書けて，$\sum_{|J|=m} a_J(x) D_x^J$ が楕円型作用素であるとする。$S_+ = \#\{\zeta_1 \in \mathbb{C} ; \sum_{|J|=m} a_J(x) \zeta_1^{j_1} \cdot (\eta)^{J'} = 0, \ \mathrm{Im}\, \zeta_1 < 0\}$ とおく。但し S_+

は $(x,\eta')\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\})$ の関数であるが，局所定数関数であるので，0の近傍では一定の正整数又は0である。その時，

$$P(x, D_x)\,u(x)=0, \qquad x_1>0$$

の任意の超関数解 $u(x)$ の境界値 $u_1(x'),\dots,u_m(x')$ は s_+ 個の独立な擬微分方程式系を満たす。すなわち，$\exists\,\{B_{jk}(x',D')\}_{j=1,\dots,s_+,\ k=1,\dots,m}$ なる擬微分作用素の行列が構成できて，任意の u に対して

$$(\ast)\qquad \sum_{k=1}^{m} B_{jk}(x',D')\,u_k(x')=0 \qquad 1\leq j\leq s_+.$$

が成立する。しかもこの方程式系の rank は s_+，すなわち，適当な番号 $1\leq k_1<k_2<\cdots<k_{s_+}\leq m$ について上の方程式は

$$u_{k_j}(x')=\sum_{\substack{1\leq l\leq m\\ l\neq k_1,\dots,k_{s_+}}} C_{jl}(x',D')\,u_l(x') \qquad j=1,\dots s_+.$$

と変形できる。逆に m 個の x' の超関数 $u_1(x'),\dots,u_m(x')$ がマイクロ関数として $(\ast)$ を満たせば，それらは，ある一つの $P(x,D_x)$ の $x_1>0$ での解 $u(x)$ の境界値として実現される。

(※) $u_1(x'),\dots,u_m(x')$ が $u(x)$ の境界値（柏原－大島の意味で）であるとは，

$$\tilde{u}(x)=\sum_{j=1}^{m} A_j(x,D_x)\left(u_j(x')(x_1)_+^{\lambda_j(x')}\right)$$

が $(0,x'_0;\pm i dx_1)$ の近傍で成立する事である。但し $\lambda_1(x'),\dots,\lambda_m(x')$ は x' の解析関数，$A_j(x,D_x)$ は $(0,x'_0;\pm i dx_1)$ の近傍で定

義された擬微分作用素でこれらは $P(x,D_x)$ のみによって決まる。又、$\tilde{u}(x)$ は台が $\{x_1 \geqq 0\}$ に含まれる $u(x)$ の拡張の一つで、$u \to \tilde{u}$ の対応で"自然"なものが一つ存在する。

証明方法は、問題をルジャンドル変換して、正則パラメータを持つマイクロ関数に対する問題に帰着させる。その後 $\mathbb{P}^1$ 上の常微分方程式の理論を使って、基本解などを構成する。詳しくは近日中に発表予定の筆者の論文を見られたい。

参考文献

[1] 柏原―大島 ; Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, Ann. Math., 106 (1977), 145–200.

[2] 大阿久 : Micro-Local Cauchy problems and local boundary value problems. Proc. Japan Acad. 55 (1979), 136–140.

[3] 片岡 : A microlocal approach to general boundary value problems. Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. Vol. 12, Supplement (1977), 147–153.

[4] 片岡 : Microlocal theory of boundary value problems II, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

[5] 田原 : Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations. Jap. J. Math. 5, No. 2 (1979), pp. 245–347.