数理解析研究所講究録
第410巻 1980年 91-98

無限階擬微分作用素の可逆性について

東大 理　青木貴史

整型超局所作用素の可逆性について考察する。整型超局所作用素の層 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ はマイクロ(=擬)微分作用素の層 $\mathcal{E}^{\infty}$ を、従って微分作用素の層 $\mathcal{D}^{\infty}$ (ともに無限階の作用素を含む) を部分層としてもつ。実領域における微分作用素(無限階)や擬微分作用素が、複素化して $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ で可逆なら、楕円性や、超局所楕円性(マイクロ函数の層の層同型を与えること)が従うから定数係数無限階微分作用素の実領域における楕円性(= analytic hypoellipticity)、超局所的楕円性についての河合[2]の結果の変数係数へのひとつの拡張を与えることになる。

<u>記号</u>　$X = \mathbb{C}^n \ni x = (x_1, \cdots, x_n)$, $T^*X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (x, \zeta)$ とする。
X上の整型超局所作用素の層 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ は次で定義された。

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}} = C^{\mathbb{R}}_{X|X\times X} \otimes p_2^{-1}\Omega^n_X .$$

ただし $C^{\mathbb{R}}_{X|X\times X}$ は整型マイクロ函数の層、Ω^n_X はX上の整型

n-forms の成す層，　$p_2: T^*_X(X\times X)\to X\times X\to X$　は second projection.

$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の $x^*\in T^*X - T^*_XX$ における芽 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*}$ は 定義函数 をラプラス変換することにより次の如く表現される：

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*} = \varinjlim_{\Gamma\ni x^*} \{\Gamma \text{における緩増大解析函数}\} \bmod \{\text{急減少解析函数}\}.$$

ここに Γ は x^* の conic な 近傍 を動く．　Γ において 解析函数 $F(x,\zeta)$ が 緩増大 であるとは 任意 の $\varepsilon>0$ に対して

$$|F(x,\zeta)e^{-\varepsilon|\zeta|}| < \infty$$

であることをいい，　急減少 であるとは ある $\delta>0$ をとれば

$$|F(x,\zeta)e^{\delta|\zeta|}| < \infty$$

であることをいう．

この同型により $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*}$ の 作用素 F は ある 近傍 $\Gamma\ni x^*$ における 緩増大 解析函数 $F(x,\zeta)$ の 同値類として 表わされる．この $F(x,\zeta)$ を F の 表象 という．　特に F が 微分作用素 であれば，それは 普通の意味での 全表象（total symbol）と一致する．　整型超局所作用素 F は その 表象 $F(x,\zeta)$ によって

$$F = F(x, D_x)$$

と 表わされる．　ただし $D_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$.

表象 の 形式和が 作用素として 収束する為の 十分条件 として 次が ある．

<u>定義 1.</u> $\mathring{x}^*$ の conic な 近傍 Γ (有界部分は無視することがある) で定義された正則函数列 $\{F_j(x,\zeta)\}_{j\geq 0}$ に対して形式和 $\sum_{j=0}^{\infty} F_j(x,\zeta)$ が 形式表象であるとは 任意の $\Gamma' \Subset \Gamma$ に対し定数 $A>0$ が存在し, 任意の $\delta>0$ に対し $C_\delta>0$ を適当に選べば次の評価をみたすことをいう:

$$|F_j(x,\zeta)| \leqq C_\delta A^j j! \, |\zeta|^{-j} \exp(\delta|\zeta|),$$
$$(x,\zeta)\in\Gamma', \quad j=0,1,2,\cdots.$$

<u>定理 2.</u> $\sum_{j=0}^{\infty} F_j(x,\zeta)$ を $\mathring{x}^*$ の近傍で定義された形式表象とすると $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\mathring{x}^*}$ の作用素として $\sum_{j=0}^{\infty} F_j(x,D_x)$ は収束する.

ふたつの形式表象で表わされる作用素の結合を形式表象で表わすことができる.

<u>定理 3.</u> $F=\sum_{j=0}^{\infty} F_j(x,D_x)$, $G=\sum_{k=0}^{\infty} G_k(x,D_x)$ をそれぞれ形式表象 $\sum_{j=0}^{\infty} F_j(x,\zeta)$, $\sum_{k=0}^{\infty} G_k(x,\zeta)$ によって定義された作用素とする. このとき 結合 $R=FG$ は次によって定まる形式表象により表わされる: $R=\sum_{l=0}^{\infty} R_l(x,D_x)$,

$$R_l(x,\zeta) = \sum_{l=|\alpha|+k+j} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_\zeta^\alpha F_j(x,\zeta)\cdot\partial_x^\alpha G_k(x,\zeta).$$

整型超局所作用素 $F \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*}$ が環 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*}$ の中で可逆である為の十分条件をその表象を用いていくつか与える。まず，マイクロ微分作用素でいえば有限階の場合に相当する十分条件から始めよう。以下断わらぬ限り x^* の近傍で考えている。

定理 4. $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x,\zeta)$ を次の条件をみたす形式表象とする: ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

(i) $C_0|\zeta|^{\lambda} \leqq |P_0(x,\zeta)| \leqq C_1|\zeta|^{\lambda}$ $(C_0, C_1 > 0$, 定数$)$

(ii) $|P_j(x,\zeta)| \leqq C_2 A^j j!\, |\zeta|^{\lambda-j}$, $j = 1, 2, \cdots$

$(C_2, A > 0$, 定数$)$

このとき整型超局所作用素 $P = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x, D_x)$ は可逆である。

証明 右逆の構成:

$$Q_0(x,\zeta) = 1 / P_0(x,\zeta)$$

$$Q_\ell(x,\zeta) = -\sum_{\substack{\ell=|\alpha|+j+k \\ k<\ell}} \frac{1}{\alpha!}\partial_\zeta^\alpha P_j(x,\zeta)\cdot\partial_x^\alpha Q_k(x,\zeta) / P_0(x,\zeta) \qquad (\ell \geqq 1)$$

によって $Q_\ell(x,\zeta)$ $(\ell \geqq 0)$ を定める。このとき $\sum_{\ell=0}^{\infty} Q_\ell(x,\zeta)$ は形式表象であることが証明できる。結合則（定理 3）により $Q = \sum_{\ell=0}^{\infty} Q_\ell(x, D_x)$ は P の右逆である。

左逆も全く同様に書くことができる。両逆が存在すればそれらは一致し，P は可逆となる。

さて，無限階のマイクロ（＝擬）微分作用素を含むクラスに対しても有効な十分条件を考察したいが，無限階であっても，定数係数なら表象の下からの評価を仮定すれば可逆性は自明である．即ち

<u>定理 5.</u>　$F = F(x, D_x)$ を表象 $F(x, \zeta)$ によって定義される整型超局所作用素とする．次の条件が成り立つとする．

(i)　$[D_j, F] = D_j F - F D_j = 0$, $j = 1, \cdots, n$　$\left(D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$

(ii)　任意の $\delta > 0$ に対し，$C_\delta > 0$ を適当に選べば

$$|F(x, \zeta)| \geqq C_\delta \exp(-\delta |\zeta|)$$

このとき　$F = F(x, D_x)$ は可逆である．

しかし，一般に変数係数無限階の作用素の場合には，多くの困難がある．有限階の微分作用素やマイクロ微分作用素の取扱いが容易なのは，ふたつの作用素の結合を考える時，その主要項はそれらの表象の積を表象とする作用素であり，交換子の部分は主要項に比べると“小さい”と考えることができたからであるが，無限階の場合はそうとは限らない．交換子もまた無限階だからである．定数係数の場合簡単なのは作用素が可換なのだから当然であろう．従って無限階の作用素の可逆性を一般的に考察するのは難しいが，

表象の $|\zeta| \to \infty$ での増大度を制限すると，交換子部分が比較的容易に扱える場合がある．それが次の定理である．

定理 6. $P = P(x, D_x)$ を表象 $P(x, \zeta)$ によって定義された擬型超局所作用素とする．ρ を $0 \leqq \rho \leqq \frac{1}{2}$ なる数とする．定数 h, $C_0, C_1 > 0$ が存在して

$$C_0 \exp(-h|\zeta|^\rho) \leqq |P(x, \zeta)| \leqq C_1 \exp(h|\zeta|^\rho)$$

が成り立てば P は可逆である．P の逆 U は $U = QR$ という形で与えられる．ここに Q は $(P(x, \zeta))^{-1}$ を表象とする擬型超局所作用素，R は

$$\exp\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} \partial_{\zeta_j} p(x, \zeta) \cdot \partial_{x_j} p(x, \zeta) \right)$$

を主要部とする 0 階の作用素である．ただし $p(x, \zeta) = \log P(x, \zeta)$.

証明の方針：Q を $(P(x, \zeta))^{-1}$ を表象とする作用素とし，結合 PQ をつくるとそれは定理 4 の条件をみたす有限階（0階）の作用素 L となる．$U = QL^{-1}$ が P の右逆となる．左逆も同様．

実際の証明は初等的ではあるが，若干の紙数を必要とするので省略し，次の典型的な例について証明の方針を追うことにする．

例 7. $P(x, D_x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} D_x^{\frac{k}{2}} \qquad (D_x = \frac{d}{dx})$

表象は $P(x, \zeta) = \exp(x\sqrt{\zeta})$ である. P の右逆を構成しよう.

$Q(x, \zeta) = \exp(-x\sqrt{\zeta}) \quad (= (P(x,\zeta))^{-1})$ とおき $Q(x,\zeta)$

を表象とする作用素 $Q(x, D_x)$ を考える.

$$Q(x, D_x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} D_x^{\frac{k}{2}}$$

である. P と Q の結合を L とする: $L = P \cdot Q$

すると $L = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(x, D_x)$ と表わされる. ここに $\sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(x, \zeta)$ は

次で定まる形式表象である:

$$L_\ell(x, \zeta) = \frac{1}{\ell!} \partial_\zeta^\ell \exp(x\sqrt{\zeta}) \cdot \partial_x^\ell \exp(-x\sqrt{\zeta}).$$

これを具体的に計算すると

$$\partial_\zeta^\ell \exp(x\sqrt{\zeta}) = \left(\frac{x}{2\sqrt{\zeta}}\right)^\ell \sum_{r=0}^{\ell-1} (-1)^r \frac{(\ell+r-1)!}{r!(\ell-r-1)!} \cdot \frac{1}{(2x\sqrt{\zeta})^r} \exp(x\sqrt{\zeta})$$

$$\partial_x^\ell \exp(-x\sqrt{\zeta}) = (-\sqrt{\zeta})^\ell \exp(-x\sqrt{\zeta})$$

であるから

$$\begin{cases} L_\ell(x, \zeta) = \left(-\frac{1}{2}\right)^\ell \sum_{r=0}^{\ell-1} (-1)^r \frac{(\ell+r-1)!}{r!(\ell-r-1)!} \cdot \frac{x^{\ell-r}}{(2\sqrt{\zeta})^r} \cdot \frac{1}{\ell!} & (\ell \geq 1) \\ L_0(x, \zeta) = 1 \end{cases}$$

となる. 従って

$$L = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} \sum_{r=0}^{\ell-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot \frac{(\ell+r-1)!}{r!(\ell-r-1)!} x^{\ell-r} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{D_x}}\right)^r$$

和の順序をかえて $1/\sqrt{D_x}$ のベキでそろえると

$$L = 1 + \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot \frac{1}{r!} \left(\sum_{\ell=r+1}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left(-\frac{1}{2}\right)^\ell \cdot \frac{(\ell+r-1)!}{(\ell-r-1)!} x^{\ell-r} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{D_x}}\right)^r$$

そこで

$$K_0(x,\zeta) = K_0(x) = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell!}\left(-\frac{1}{2}x\right)^{\ell}$$

$$K_r(x,\zeta) = \left(-\frac{1}{2}\right)^r \frac{1}{r!} \sum_{\ell=r+1}^{\infty} \frac{1}{\ell!}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\ell} \frac{(\ell+r-1)!}{(\ell-r-1)!}\, x^{\ell-r} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)^r \quad (r>0)$$

とおくと

$$K_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \quad \left(= \exp\left(-\frac{\partial}{\partial\zeta} x\sqrt{\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial x} x\sqrt{\zeta}\right)\right),$$

$$|K_r(x,\zeta)| \leq C \cdot 2^{r-1} |\zeta|^{-\frac{r}{2}} \quad (r>0,\ C\text{は定数})$$

であることがわかるから

$$\tilde{K}_m(x,\zeta) = K_{2m}(x,\zeta) + K_{2m+1}(x,\zeta) \qquad m=0,1,2,\cdots$$

とおくと $\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{K}_m(x,\zeta)$ は形式表象で

$$L = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{K}_m(x, D_x),$$

しかも $\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{K}_m(x,\zeta)$ は定理 4 の条件をみたしているから逆 L^{-1} が計算できる. その主要部は $K_0(x)^{-1} = \exp\left(\frac{1}{2}x\right)$ である.

$U = Q\cdot L^{-1}$ は P の右逆となる. 実際

$$PU = P(QL^{-1}) = (PQ)L^{-1}$$

$$= L\cdot L^{-1} = 1.$$

左逆については同様なので略す.

以上の結果の詳細については [1] を参照されたい.

文献

[1] Aoki, T. Invertibility for microdifferential operators of infinite order, to appear.

[2] Kawai, T. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 17 ('70) 467-517.