数理解析研究所講究録
第 411 巻 1981 年 62-68



# p進L関数入門V
## ( Stickelberger の定理と岩沢の Main Conjecture )

東大 教養　片岡 俊孝

### §1. Stickelberger の定理。

Kをアーベル体 ( i.e. $\mathbb{Q}$上の有限次アーベル拡大 ), その conductor を f とする。$G = Gal(K/\mathbb{Q})$ とおく, f と素な整数 a に対して, $\left(\frac{K}{a}\right)$ で、$\mathbb{Q}(\zeta_f)$ の $\zeta_f$ を $\zeta_f^a$ に写す automorphism の K への制限をあらわす。ただし、$\zeta_f$ は、1の原始 f 乗根である。

次の $\mathbb{Q}$ 上の G の群環 $\mathbb{Q}G$ の元 $\alpha(K)$ を K の <u>Stickelberger element</u> と呼ぶ。

$$\alpha(K) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times} \left\langle \frac{a}{f} \right\rangle \left(\frac{K}{a}\right)^{-1}$$

ただし、$\langle x \rangle$ は x の小数部分をあらわす。

$$\mathcal{S} = \alpha(K)\mathbb{Z}G \cap \mathbb{Z}G \quad \text{in } \mathbb{Q}G$$

を K の <u>Stickelberger ideal</u> と呼ぶ。

Stickelberger の定理

$\mathcal{S}$ の元は、K のイデアル類群を anihilate する。

( i.e. $\forall \alpha \in \mathcal{S}$, $\forall \mathfrak{a}$ : K のイデアル, $\exists \gamma \in K^\times$ s.t. $\mathfrak{a}^\alpha = (\gamma)$ )

証明は、Gauß sum の素イデアルの積への分解 (Stickelberger)、及び Jacobi sum の grössen character としての解釈より。

このような formulation は、H. W. Leopoldt による。

§2. p 進 L 函数の Stickelberger element による構成 (岩沢).

この § では、Dirichlet character $\chi$、及び素数 p に対して Stickelberger element による p 進 L 函数の構成 ( 岩沢 [4], [5] ) を、次の場合に限定して述べる。

$$\begin{cases} p ; & \text{奇素数} \\ \chi ; & \text{Dirichlet character with } \chi = \omega^i \ (i \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ただし、$\omega$ は、Teichmüller character である。

まず、

$$\begin{cases} q_n = p^{n+1} & (n \geqq 0, \text{ integer}) \\ G_n = (\mathbb{Z}/q_n\mathbb{Z})^\times & \\ \Gamma_n = \mathrm{Ker}(G_n \longrightarrow G_0) & (\simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Delta_n = \{ a \ (\mathrm{mod}\ q_n) \mid a^{p-1} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ q_n) \} \quad (\simeq \Delta_0)$$

とおく。

$p$と素な整数$a$に対して、$\sigma_n(a) = a \pmod{q_n}$とおく。$G_n$は、$G_n = \Gamma_n \times \Delta_n$と直積にかけるから、$\sigma_n(a)$に対応する$\Gamma_n$の成分、及び$\Delta_n$の成分をそれぞれ$\gamma_n(a)$, $\delta_n(a)$とおく。

$G = \varprojlim_n G_n$, $\Gamma = \varprojlim_n \Gamma_n \ (\simeq \mathbb{Z}_p)$, $\Delta = \varprojlim_n \Delta_n \ (\simeq \Delta_0)$ とおく。このとき、$G = \Gamma \times \Delta$である。これより$p$と素な整数$a$に対して、$\sigma(a) = \lim_n \sigma_n(a) \in G$, $\gamma(a) = \lim_n \gamma_n(a) \in \Gamma$, $\delta(a) = \lim_n \delta_n(a) \in \Delta$が定まる。

$R_n = \mathbb{Z}_p\Gamma_n$, $R = \varprojlim_n R_n$とおく。可換図式$(n \geq 0)$

$$
\begin{array}{ccc}
R = \varprojlim_n R_n & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}_p[[T]] \ (= \Lambda) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R_n & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}_p[[T]]/(1-(1+T)^{p^n}) \\
\Psi & & \Psi \\
\gamma(1+p) & \longleftrightarrow & (1+T) \bmod (1-(1+T)^{p^n})
\end{array}
$$

により、$R$と$\mathbb{Z}_p[[T]]$の同型を定める。ここで$\gamma(1+p)$は、$\Gamma_n$のgeneratorであることを注意する。

$\chi = \omega^i$ ($i$は偶数)に対して、§1で定められたStickelberger elementより自然に得られる$\mathbb{Q}\Gamma_n$の元$\xi_n^\chi$を、

$$
\xi_n = \xi_n^\chi = -\frac{1}{q_n} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{q_n} a\,\chi\omega^{-1}(a)\gamma_n(a)^{-1}
$$

で定める。$\xi_n^\chi$は、$\chi = \omega^0$ (i.e. 単位指標)のときをのぞいて$R_n$の元である。自然な$R_{n+1} \longrightarrow R_n$ $(n \geq 0)$は、$\xi_{n+1}^\chi$

を $\xi_n^\chi$ に写すから，

$$\xi_\infty^\chi = \lim_{n\to\infty} \xi_n^\chi$$

によって，$\chi \neq \omega^0$ のときは，$R$ の元 $\xi_\infty^\chi$，$\chi = \omega^0$ のときは，$R$ の商体の元 $\xi_\infty^\chi$ を定めることができる。

上の同型で $\xi_\infty^\chi$ に対応する $\Lambda$ の元（ただし，$\chi = \omega^0$ のとき，$\Lambda$ の商体の元）を $f(T;\chi)$ とかく。

<u>定理</u>　$f((1+p)^{1-n}-1\,;\chi) = -\,(1-\chi_n(p)p^{n-1})\,B_{n,\chi_n}/n$，

$\chi_n = \chi\omega^{-n}$ が，すべての自然数 $n$ に対して成り立つ。

ところで，$L(1-n,\chi_n) = -B_{n,\chi_n}/n$（$L(s,\chi)$ は，Dirichlet の $L$ 函数），及び

$$L_p(1-n,\chi) = (1-\chi_n(p)p^{n-1})\,L(1-n,\chi_n),\ n\in\mathbb{N},$$

であったから，

$$L_p(s;\chi) = f((1+p)^s-1\,;\chi)$$

が成り立つ。$L_p(s;\chi)$ に対して，このような $f(T;\chi)$ は，存在すれば一意的であることに注意。

§3．岩沢の Main Conjecture。

この§では，基礎体が $\mathbb{Q}$ のときの Main Conjecture を述べる。この場合には，Main Conjecture は，証明されている（小池

[7] を見よ)。基礎体が、総実代数体のときは、J. Coates [1] を見よ。R. Greenberg [2], [3] も参照。

$\omega^i$ に対応する $\mathbb{Z}_p\Delta$ の idempotent $\varepsilon^{(i)}$ を

$$\varepsilon^{(i)} = \frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p-1} \omega^{-i}(a)\,\delta(a)$$

で定める。ただし、$i$ は整数で、$\Delta$、及び $\delta(a)$ は §2 と同じである。

$S_n$ を $\mathbb{Q}(\zeta_{q^n})$ の $p$-class group (i.e. イデアル類群の $p$-Sylow group) とする。

$X = \varprojlim_n S_n$ とおくと、$X$ は、自然に $\mathbb{Z}_p\Delta$、及び $\Lambda$ 上の加群とみなせ、2つの作用は可換である。したがって、$\Lambda$-加群としての $\varepsilon^{(i)}$ による直和分解

$$X = \bigoplus_{i=1}^{p-1} X^{(i)} \quad , X^{(i)} = \varepsilon^{(i)} X ,$$

が成り立つ。$X^{(i)}$ は、有限生成 Torsion $\Lambda$-module であるから、有限生成 $\Lambda$-加群の一般論より (木田 [6] を参照)

$$X^{(i)} \sim \bigoplus_{j=1}^{r_i} \Lambda/(f_{ji}(T))$$

が成り立つ。ただし、"$\sim$" は modulo pseudo isomorphism の意。$f_{ji}(T)$ は、$T$ に関する distinguished polynomial である。

$$f_i(T) = \prod_{j=1}^{r_i} f_{ji}(T) \qquad (\in \mathbb{Z}_p[T])$$

とおく。

以上の準備のもとで、

岩沢の Main Conjecture

$$(f_i(T)) = (f(T;\omega^{1-i})) \quad \text{for all odd } i \ (\not\equiv 1 \pmod{p-1})$$

ここに、$(f)$ は、$f$ により生成される $\Lambda$ の ideal をあらわす。

その他の文献については、S. Lang [8], [9], 森田 [10] 等をみよ。

## 文献


[1] J. Coates; p-adic L-functions and Iwasawa's theory, p269–353, Alg. Number Fields, A. Fröhlich, ed., New York and London, Academic Press, 1977.

[2] R. Greenberg; On p-adic L-functions and cyclotomic fields, Nagoya Math. J., 56, p61–77, 1974.

[3] 〃 ; 〃 II, Nagoya Math. J., 67, p139–158, 1977.

[4] K. Iwasawa; On p-adic L-functions, Ann. Math., 89, p198–205, 1969.

[5] 〃 ; Lectures on p-adic L-functions, Ann. of Math. Studies, 74, Princeton University Press, 1972.

[6] 木田 祐司; p進L函数入門III, this volume.

[7] 小池 正夫; 〃 VII, this volume.

[8] S. Lang ; Cyclotomic fields , Springer-Verlag , New York , 1978.

[9] 〃 ; 〃 II, Springer-Verlag , New York , 1980.

[10] 森田 康夫 ; p進L函数入門 I, this volume.

[11] 〃 ; p進特殊函数について, 数学, 32 , p17-29 , 1980。

[12] L. Stickelberger ; Über eine Veralgemeinerung der Kreistheilung , Math. Ann. 37, p321-367, 1890.