数理解析研究所講究録
第 411 巻 1981 年 99-108

ある代数体のイデアル類群の l-rank について

都立大 理　　飯村 清明

§0 l : odd prime; $K/\mathbb{Q}$ は ln 次の metacyclic 拡大とする.(i.e; $Gal(K/\mathbb{Q}) = \langle\sigma,\tau\rangle$; $\sigma^l = \tau^n = 1$, $n \mid l-1$, $\tau\sigma = \sigma^r\tau$, r は $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$ における primitive n-th root of 1). さて, $H = \langle\tau\rangle$ とし, $\mathfrak{X} = Hom(H, \mathbb{Z}_l^\times)$ とする.

$\psi \in \mathfrak{X}$ を $\tau'^{-1}\sigma\tau' = \sigma^{\psi(\tau')}$ for all $\tau' \in H$, をみたすものとする. H の fixed field を L, $\langle\sigma\rangle$ のそれを F とすれば, $L/\mathbb{Q}$ の the Galois closure が $K = L\cdot F$ となる.(よく知られている様に, $L/\mathbb{Q}$ が l 次 non-Galois 拡大で, その Galois closure K の $\mathbb{Q}$ 上の Galois group が solvable であれば, 必ず $G(K/\mathbb{Q})$ は上のタイプの metacyclic group となる). 一般の代数体 M に対し, S_M で, the l-class group of M を表わし, その l-rank$=\dim_{\mathbb{F}_l}(S_M/S_M^{\,l})$ を rank S_M と書くことにする.

以下の目標は, rank S_L を Galois action を通して, 考察することである. これまでに知られた結果は次のとおり:

a) $\ell=3$, $n=2$ のとき，$\mathrm{rank}\, S_L$ を計算する algorithm が与えられている．(G. GRAS; F. GERTH III; S. KOBAYASHI.)

b) $n=2$, (i.e. $G(K/\mathbb{Q})$ が 2ℓ 次 dihedral group のとき) $\mathrm{rank}\, S_L$ を $\ell\geq 5$ のときに計算するのは，実際には非常に困難である．しかし，$\mathrm{rank}\, S_L$ の a lower bound, an upper bound は得られている．(G. GRAS; F. GERTH III; S. KOBAYASHI).

c) $G(K/\mathbb{Q})$ が上のタイプの metacyclic の場合にも $\mathrm{rank}\, S_L$ の a lower bound, an upper bound が与えられている．(F. GERTH, III; J-F. JAULENT).

d) 一般の ℓ 次拡大 $L/\mathbb{Q}$ に対して，$\mathrm{rank}\, L$ の a lower bound が得られている．(FRÖHLICH; ISHIDA; ROQUETTE-ZASSENHAUS; ……).

以上の結果と，私たちの結果との関係はあとで述べる．

§1. $\forall\chi\in\mathfrak{X}$ に対して，e_χ を χ に associate した $\mathbb{Z}_\ell[H]$ の idempotent; i.e. $e_\chi := n^{-1}\sum_{\tau\in H}\chi(\tau^{-1})\tau$ とする．各 $\mathbb{Z}_\ell[H]$-module N に対して，

$$N^{(\chi)} := N^{e_\chi} := \{n^{e_\chi};\ n\in N\}$$ とすれば，

$N^{(\chi)} = \{n\in N;\ n^\tau = n^{\chi(\tau)}\}$ であって，$N=\prod_{\chi\in\mathfrak{X}} N^{(\chi)}$．

$\chi_0\in\mathfrak{X}$ を the trivial character とする．$S_L \hookrightarrow S_K$ だから，S_L を S_K に imbed しておけば，$S_L = S_K^{(\chi_0)}$ となる．

DEF 1. $\Delta := 1-\sigma$; 各 $1 \leq i \leq \ell-1$ に対して,

$$\mathcal{A}_i := \mathcal{A}_K^{\Delta^{i-1}}\mathcal{A}_K^{\ell} \,/\, \mathcal{A}_K^{\Delta^{i}}\mathcal{A}_K^{\ell}$$ とおく. 各 $\mathcal{A}_i$ は $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module となる.

LEMMA 1. $\operatorname{rank} \mathcal{A}_L = \sum_{i=1}^{\ell-1} \operatorname{rank} \mathcal{A}_i^{(\chi_0)}$.

LEMMA 2. $\forall \chi \in \mathfrak{X}$, $\forall i \geq 0$ に対して,

$$e_\chi \Delta^i \equiv \Delta^i e_{\chi\psi^i} \pmod{\Delta^{i+1}\mathbb{Z}_\ell[G]}.$$

このLEM. 2から, 次のProp. 1が得られる.

PROPOSITION 1. $\Lambda_i := \operatorname{Ker}(\Delta^{i-1}; \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_i)$ とおけば, $\forall \chi \in \mathfrak{X}$ に対して,

$$1 \to \Lambda_{i+1}^{(\chi\psi^{1-i})} \xrightarrow{\text{incl.}} \mathcal{A}_1^{(\chi\psi^{1-i})} \xrightarrow{\Delta^i} \mathcal{A}_{i+1}^{(\chi\psi)} \to 1 \text{ (exact)}.$$

従って, $\operatorname{rank} \mathcal{A}_{i+1}^{(\chi\psi)} = \operatorname{rank} \mathcal{A}_1^{(\chi\psi^{1-i})} - \operatorname{rank} \Lambda_{i+1}^{(\chi\psi^{1-i})}$.

Lem. 1とProp. 1をみれば, $\operatorname{rank} \mathcal{A}_L$ を調べるには, $\mathcal{A}_1^{(\chi)}$, $\Lambda_i^{(\chi)}$, $(\chi \in \mathfrak{X})$, を調べればよいことになる.

(a) $\mathcal{A}_1^{(\chi)}$, $(\chi \in \mathfrak{X})$, についての考察.

次のProp. 2を使いたい:

PROPOSITION 2. (J-F. JAULENT, 1979.)

$N_{K/F}$ で $\mathcal{A}_K$ から $\mathcal{A}_F$ への the norm map を表わし, $\mathcal{A}_K$ の $\mathbb{Z}_\ell[G]$-submodule $\overline{\mathcal{A}_K}$ を $\overline{\mathcal{A}_K} := \{ \mathfrak{a} \in \mathcal{A}_K ; N_{K/F}\mathfrak{a} = 1 \}$ で定

義すれば, $\forall \chi \in \mathfrak{X}$ に対して,

$$\operatorname{rank}\left(\bar{S}_K / S_K^{\Delta}\right)^{(\chi)} = \operatorname{rank}\left(D_a / D_0\right)^{(\psi^{-1}\chi)} - \operatorname{rank} \mathcal{E}^{(\chi)} - \delta\langle \psi, \chi \rangle .$$

ここに, $D_a :=$ the group of σ-invariant ideals of K;
$D_0 :=$ the group of K that are extensions of ideals of $\mathbb{F}$;
$\mathcal{E} := E_{\mathbb{F}} / (E_{\mathbb{F}} \cap N_{K/\mathbb{F}} K^{\times})$; $E_{\_}$ は, 体 _ の unit group;

$\delta := \begin{cases} 1 & \text{if } K/\mathbb{F} \text{ is ramified} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$; $\langle \psi, \chi \rangle := \begin{cases} 1 & \text{if } \psi = \chi \\ 0 & \text{if } \psi \neq \chi . \end{cases}$

右辺の項のうちで, $\operatorname{rank} \mathcal{E}^{(\chi)}$ 以外はすぐ求められるものであることに注意しておく. $\operatorname{rank} S_1^{(\chi)}$ と $\operatorname{rank}\left(\bar{S}_K / S_K^{\Delta}\right)^{(\chi)}$ との間の関係を調べよう. そのために

$X = \left(S_K / S_K^{\Delta}\right)^{(\chi)}$, $Y = \left(\bar{S}_K / S_K^{\Delta}\right)^{(\chi)}$, $Z = \left(N_{K/\mathbb{F}} S_K\right)^{(\chi)}$ とおく. $\operatorname{rank} S_1^{(\chi)} = \operatorname{rank} X$ に注意する. exact seq

$1 \to Y \to X \xrightarrow{N_{K/\mathbb{F}}} Z \to 1$ から

$\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} Z + \operatorname{rank} Y - \operatorname{rank}\left(Y \cap X^{\ell}\right)$ をうる.

そこで, $\operatorname{rank}\left(Y \cap X^{\ell}\right)$ を調べる. t を $K/\mathbb{F}$ で完全分岐する $\mathbb{F}$ の places $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t$ の個数とすれば, $t = 0$ or 1 なら $Y = \{1\}$ なので何もすることはないので, $t \geq 2$ を仮定する. 各 $1 \leq i \leq t-1$ に対して, $\varphi_i : \mathbb{F}^{\times} \to G(K/\mathbb{F}) = \langle \sigma \rangle$ を

$\varphi_i(z) := (z, K/\mathbb{F})_{\mathfrak{p}_i}$ (= the norm residue symbol) として定め, $\varphi = \prod_{i=1}^{t-1} \varphi_i : \mathbb{F}^{\times} \to G(K/\mathbb{F})^{t-1}$ とおく. $W := G(K/\mathbb{F})^{t-1} / \varphi(E_{\mathbb{F}})$

$P_F :=$ the group of principal ideals of F とすれば, φ は自然に $\varphi' : P_F \to \overline{W}$ を induce し. $\overline{I_K} := \{\mathfrak{a} : \text{ideal of } K, N_{K/F}\mathfrak{a} \in P_F\}$ とすれば, $\varphi' \circ N_{K/F} : \overline{I_K} \to \overline{W}$ をうる.

LEMMA 3 (HALTER-KOCH)

$\varphi' \circ N_{K/F}$ は surjective homomorphism であり, 自然に isomorphism $\lambda : Y \xrightarrow{\sim} \overline{W}$ を induce する.

LEMMA 4. $S_F^0 := \{ h \in S_F ; h^\ell = 1 \}$ とすれば.
$Y \cap X^\ell = \iota(S_F^{0(x)}) S_K^\Delta / S_K^\Delta$, $\iota : S_F \to S_K$ は inclusion map である.

LEMMAS 3, 4 により.

$\operatorname{rank}(Y \cap X^\ell) = \operatorname{rank} \lambda(\iota(S_F^{0(x)}))$ となるが, λ の定義をみれば. $\operatorname{rank}\lambda(\iota(S_F^{0(x)}))$ は 次のように与えられる:
$S_F^{0(x)}$ の generators に属する F の ideals を $h_1, \cdots, h_u$ とし. $h_i^\ell = (a_i)$; $a_i \in F^\times$ とせよ. E_F の generators を $a_{u+1}, \cdots, a_v$ とし, $M^{(x)}$ を $i \times j$ 成分が $(a_i, K/F)_{\mathfrak{q}_j}$ である $v \times (t-1)$ matrix とする. $M^{(x)}$ を自然に $\mathbb{F}_\ell$ 上の matrix と考えたとき, $\operatorname{rank}\lambda(\iota(S_F^{0(x)})) = \operatorname{rank} M^{(x)} - \operatorname{rank} \mathcal{E}$; $\mathcal{E} = E_F / (E_F \cap N_{K/F} K^\times)$.

(b) $\Lambda_i^{(x)}$, $x \in \mathfrak{X}$, $i \geq 1$ に関する考察.

LEMMA 5. $H_i := \operatorname{Ker}(\Delta^i : S_K \to S_K)$ とすれば,

H_i は $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module であって，$\forall \chi \in \mathfrak{X}$ に対して

$$\Lambda_i^{(\chi)} = H_{i-1}^{(\chi)} S_K^{\Delta} S_K^{\ell} / S_K^{\Delta} S_K^{\ell}$$ であって，

$\mathrm{rank}\,\Lambda_i^{(\chi)} = \mathrm{rank}\,Y' - \mathrm{rank}\,(Y \cap X^{\ell}) + \mathrm{rank}(Z'/Z^{\ell})$，

ここに，$Y' := (H_{i-1}^{(\chi)} \cap \overline{S_K}) S_K^{\Delta} / S_K^{\Delta}$；$Z' := N_{K/F} H_{i-1}^{(\chi)}$．

従って LEM. 3 によれば，

$$\mathrm{rank}\,\Lambda_i^{(\chi)} = \mathrm{rank}\,\lambda\,(H_{i-1}^{(\chi)} \cap \overline{S_K}) - \mathrm{rank}\,\lambda\,(L(S_F^{o(\chi)})) + \mathrm{rank}(Z'/Z^{\ell}).$$

$i \geq 3$ に対する $\overset{\mathrm{rank}}{\lambda}(H_{i-1}^{(\chi)} \cap \overline{S_K})$ の計算は，$H_{i-1}^{(\chi)} \cap \overline{S_K}$ の generators に属する ideals を求めるのが困難なので，非常に難しい．§0 の a) のときには，$i \leq 2$ となるので algorithm が実際使えるのである．

<u>Case $i=2$.</u> LEM. 5 によって，$\Lambda_2^{(\psi^{-1})} = H_1^{(\psi^{-1})} S_K^{\Delta} S_K^{\ell} / S_K^{\Delta} S_K^{\ell}$．

また PROP. 1 によって，$\mathrm{rank}\,S_2^{(\chi_0)} = \mathrm{rank}\,S_1^{(\psi^{-1})} - \mathrm{rank}\,\Lambda_2^{(\psi^{-1})}$．

<u>LEMMA 6</u> $H_1^{o} := \langle cl_K(\mathfrak{p})$；$\mathfrak{p}$ は，K の σ-invariant prime ideal $\rangle \cap S_K$，とすれば，$\forall \chi \in \mathfrak{X}$ に対して，

$$H_1^{(\chi)} / H_1^{o(\chi)} \simeq \left[(E_F \cap N_{K/F} K^{\times}) / N_{K/F} E_K\right]^{(\chi\psi)}.$$

とくに，$H_1^{(\psi^{-1})} = H_1^{o(\psi^{-1})}$．

<u>LEMMA 7.</u> $\forall \chi \in \mathfrak{X}$，$\chi \neq \psi^{-1}$ に対して，$L(S_F^{(\chi)}) \subset S_K^{\Delta} S_K^{\ell}$．

<u>LEMMA 8.</u> $S_1^{(\chi_0)}$ の order は，$L/\mathbb{Q}$ に関する genus number である．すなわち，$\mathrm{rank}\,S_1^{(\chi_0)}$ は，F において完全分解し，か

つLにおいて完全分岐する$\mathbb{Q}$のplacesの個数に等しい.

LEMMAS 6–8 及び $\mathrm{rank}\,\mathcal{S}_L \geq \mathrm{rank}\,\mathcal{S}_1^{(\chi_0)} + \mathrm{rank}\,\mathcal{S}_2^{(\chi_0)}$ に注意すれば, $\mathrm{rank}\,\mathcal{S}_L \geq \mathrm{rank}\,\mathcal{S}_1^{(\psi^{-1})}$ が得られる.

e.g. $\ell \geq 5$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{m})$, $m \in \mathbb{Z}$, mは ℓ^{th} powerfree とすれば, $\mathrm{rank}\,\mathcal{E}^{(\psi^{-1})} = 0$ なので,

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}\,\mathcal{S}_L &\geq \#\{p : \text{rational prime} \equiv \pm 1\,(\ell),\ p \mid m\} \\ &\quad + \mathrm{rank}\,\mathcal{S}_F^{0(\psi^{-1})} - \mathrm{rank}\,\lambda(L(\mathcal{S}_F^{0(\psi^{-1})})) \\ &\geq \#\{p : \text{rational prime} \equiv \pm 1(\ell),\ p \mid m\}.\end{aligned}$$

§3. $\mathbb{W}_i := H_1 \cap \mathcal{S}_K^{\Delta^i}\mathcal{S}_K^{\ell} / \mathcal{S}_K^{\Delta^i}\mathcal{S}_K^{\ell}$ とおけば, LEM. 2 により. $1 \to \mathbb{W}_i^{(\chi)} \xrightarrow{\text{incl.}} \mathcal{S}_i^{(\chi)} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{S}_{i+1}^{(\chi\psi)} \to 1$ は, $\forall \chi \in \mathcal{X}$ に対して, exactである. そこで, $2 \leq i \leq \ell - 1$ なるiに対して. $\tilde{\mathcal{S}}_i := \mathcal{S}_K / \mathcal{S}_K^{\Delta^i}\mathcal{S}_K^{\ell}$ とおけば,

$\mathrm{rank}\,\tilde{\mathcal{S}}_i = \sum_{j=1}^{i} \mathrm{rank}\,\mathcal{S}_j^{(\chi\psi^{j-i})} - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{W}_j^{(\chi\psi^{j-i})}$ をうる.

これより, 次の Th. 1 を得る.

<u>*THEOREM 1*</u> $\mathrm{rank}\,\mathcal{S}_L \leq (\ell-1)n^{-1} \cdot \mathrm{rank}\,\mathcal{S}_1$.

<u>REMARK.</u> §0. b), c) で得られている $\mathrm{rank}\,\mathcal{S}_L$ の the upper bound は, $(\ell-1)n^{-1} \cdot \mathrm{rank}(H_1 \cap \overline{\mathcal{S}_K})$ である. $\mathrm{rank}(H_1 \cap \overline{\mathcal{S}_K})$ は $\mathrm{rank}(\overline{\mathcal{S}_K}/\mathcal{S}_K^{\Delta}) + \mathrm{rank}\,\mathcal{S}_F - \mathrm{rank}(N_{K/F}H_1/\mathcal{S}_F^{\ell})$ に等しい.

私たちの得た the upper bound における $\mathrm{rank}\,\mathcal{S}_1$, と $\mathrm{rank}(H_1 \cap \overline{\mathcal{S}_K})$ と

の差は次のとおり： K/F が unramified であれば，
$\mathrm{rank}\, S_1 \geq \mathrm{rank}(H_1 \cap \overline{S_K})$；ramified であれば，
$\mathrm{rank}\, S_1 - \mathrm{rank}(H_1 \cap \overline{S_K}) = \mathrm{rank}(N_{K/F} H_1 / S_F^{\ell})$
$- \mathrm{rank}\, \lambda(\iota(S_F^0))$．　　とくに $S_F = \{1\}$ であれば，
上の2つの bounds は一致してしまう．

次に，$\mathrm{rank}\, S_L$ の a lower bound を与えよう．$1 \leq j \leq \ell-2$ なる j に対しては，

$$\overline{W}_j^{(4^j)} \simeq H_1^{(4^j)} / (H_1^{(4^j)} \cap S_K^{\Delta^j} S_K^{\ell})$$

であって，$S_K^{\Delta^j} S_K^{\ell} = S_K^{\Delta^j} \iota(Z')$，$Z' = N_{K/F} S_K$．
に注意すれば，K/F が ramified のときには，$\forall j$；$1 \leq j \leq \ell-2$ に対して，

$$\mathrm{rank}\, \overline{W}_j^{(4^j)} \leq \mathrm{rank}\, C^{(4^j)} + \mathrm{rank}\left(E_F \cap N_{K/F} K^{\times} / N_{K/F} E_K\right)^{4^{1+j}}$$

を得る．ここに，$C := \langle Cl_K(\mathfrak{p})^c$；$\mathfrak{p}$ は F で完全分解する K の prime ideal $\rangle$，$c :=$ C_F/S_F の order，C_F は，F の ideal class group．そのとき，次の Th. 2 を得る．

<u>THEOREM 2</u>　K/F が ramified であれば，

$$\mathrm{rank}\, S_L \geq \mathrm{rank}\, H_1^{0(x_0)} + \mathrm{rank}\, S_1 - \mathrm{rank}\, C - \mathrm{rank}\left(E_F \cap N_{K/F} K^{\times} / N_{K/F} E_K\right).$$

<u>REMARK</u>．$\mathrm{rank}\, S_L \geq \mathrm{rank}\, H_1^{0(x_0)}$ は，明らかに成り立つ不等式である．§0．c) で GERTH の与えた the lower bound は，

rank $H_1^{0(x_0)}$であり，d) で与えられた lower bound は，$H_1^{(x_0)}$ のある subgroup の rank の lower bound である．

この Prop. 4 の意義は，次のとおり：大ざっぱに評価して，

$$\mathrm{rank}\,S_1 - \mathrm{rank}\,C - \mathrm{rank}(E_F \cap N_{K/F}K^\times / N_{K/F}E_K)$$
$$\geqq \mathrm{rank}\,S_F - \mathrm{rank}\,C - \mathrm{rank}(E_F \cap N_{K/F}K^\times / N_{K/F}E_K)$$

であるから，rank S_F が，rank C に比較して，ある程度大きければ，rank S_L は，rank S_F と共に大きくなる，すなわち，rank S_L に rank S_F が関与している ― この事実は，すでに $l=3$, $n=2$ の場合に顕著であった．すなわち，K/F が unramified であれば，(但し，$l=3$ かつ $n=2$ とする．)

rank S_L = rank $S_F - 1$; K/F において分岐する F の prime がただ1つであれば，rank S_L = rank S_F (G. GRAS; F. GERTH III).

THEOREM 3. K/F が unramified であれば，

$$\mathrm{rank}\,S_L \geqq (l-1)n^{-1}\cdot(\mathrm{rank}\,S_F' - d - 1) + \mathrm{rank}\,H_1^{(x_0)}.$$

ここに，$\mathrm{rank}\,S_F' = \mathrm{rank}(N_{K/F}S_K) = \begin{cases} \mathrm{rank}\,S_F, \text{ or} \\ \mathrm{rank}\,S_F - 1 . \end{cases}$

$d = \mathrm{rank}(E_F / N_{K/F}E_K)$.

§4. $S_i^{(x)}$, $\Lambda_i^{(x)}$, $\overline{W}_i^{(x)}$, $x \in \mathfrak{X}$, $1 \leqq i \leqq l-1$, 達の間の関係は次のとおりである．(seq. 達は，すべて exact である)

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \Lambda_i^{(\chi\psi^{1-i})} \arrow[r, "\mathrm{incl.}"] \arrow[d, "\mathrm{incl}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Lambda_i^{(\chi\psi^{1-i})} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{incl.}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \Lambda_{i+1}^{(\chi\psi^{1-i})} \arrow[r, "\mathrm{incl}"] \arrow[d, "\Delta^{i-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Lambda_1^{(\chi\psi^{1-i})} \arrow[r, "\Delta^{i+1}"] \arrow[d, "\Delta^{i-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Lambda_{i+1}^{(\chi\psi)} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{incl}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & W_i^{(\chi)} \arrow[r, "\mathrm{incl}"] \arrow[d] & \Lambda_i^{(\chi)} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & \Lambda_{i+1}^{(\chi\psi)} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}
$$

REFERENCES. (主なものに限る.)

F. GERTH III; Mathematika 23 (1976), Acta. Arith. 30, No. 4 (1977), etc

G. GRAS, Séminaire de Théorie des Nombres. Besançon (1974-5),
J. Math. Soc. Japan 26, No. 4 (1974), etc.

HALTER-KOCH, J. Number Theory 4 (1972), 144-156;
J. für die reine und ang. Math. 301 (1978), etc.
147-160.

M. ISHIDA; Springer Lecture Notes 555

J-F. JAULENT: Besanson 大における Thése (1979).

S. KOBAYASHI; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, 20 (1973), etc; J. Math. Soc. Japan 26, No. 4 (1974).

ROQUETTE-ZASSENHAUS; J. London Math. Soc. 44 (1969)

K. IIMURA; Acta. Arith. 35, No. 4 (1979).