数理解析研究所講究録
第411巻 1981年 189-198



# カスプ形式の周期について

九大理　門寺 芳治

この報告の目的は Shimura [7], Manin [4] にはじまるカスプ形式の周期の有理性の問題に関して Razar [5] を補い Shimura [8], [9] にあるような一般的な結果を導く1つの方法を示すことにある ( cf. Hatada [2], Shokurov [10] ). [5] では $\Gamma_0(N)$ 上の Haupttypus の場合だけしか扱われておらず結果も制限付きではあるが，その方法は Shimura 同型をそのままの形で使うもので簡明で見通しが良くそのまま主合同部分群上の eigenform の場合へ拡張される．さらに Ramanujan-Petersson の不等式についての1つの注意によって eigenform の周期と Fourier 係数との間の簡単な関係から周期の有理性の一般的な結果が導かれる ( cf. [3] ).

1. 周期の有理性の結果．　$k \geq 2$ を整数，$\rho_{k-2}: GL_2(\mathbb{C}) \to GL_{k-1}(\mathbb{C})$ をテンソル表現，$dz_{k-2} = {}^t(z^{k-2}dz, z^{k-3}dz, \cdots, dz)$ を上半平面上のベクトル値微分形式とする．自然数 $N$ に対して

$$\Gamma_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N \right\}$$

として，Eichler cohomology 群 $H_P^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1}) = Z_P^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})/B^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ および $\Gamma_N$ 上の重さ $k$ のカスプ形式の空間 $S_k(\Gamma_N)$ から parabolic な 1-cocycle 群 $Z_P^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ への

$$\delta_0(g)_\gamma = \int_{\gamma(i\infty)}^{i\infty} g(z)\, dz_{k-2}, \quad g \in S_k(\Gamma_N),\ \gamma \in \Gamma_N$$

で定義される $\mathbb{C}$-線型写像 $\delta_0$ を考える．$\delta$ で $\delta_0$ から導かれる $H_P^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ への $\mathbb{C}$-線型写像を表せば，$\delta_0$ および $\delta$ は $\mathbb{C}$-線型な埋め込みで

$$\dim_{\mathbb{C}} H_P^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1}) = 2 \dim_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma_N)$$

であることが知られている．Razar の方法 [5] に基づいて次を証明する．

定理 (Shimura)．$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z/N} \in S_k(\Gamma_N)$, $a_1 = 1$ を階数 $N$ のすべての Hecke 作用素 $T_n$, $n \geqq 1$ の同時固有函数とする．そのとき

1) 定数 $u^{\pm} \neq 0$ が存在して，すべての有理数 $x$ に対して

$$\frac{1}{u^{\pm}} \left\{ \int_x^{i\infty} f(z)\, dz_{k-2} \pm (-\rho_{k-2}(\varepsilon)) \int_{-x}^{i\infty} f(z)\, dz_{k-2} \right\} \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3, \cdots)^{k-1}$$

が成り立つ．ただし $\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

2) $K_f=\mathbb{Q}(a_1,a_2,a_3,\cdots)$ とおけば $K_f$ の $\mathbb{C}$ への各埋め込み $\sigma$ に対して定数 $u_\sigma^\pm\neq 0$ が存在して

$$\left[\frac{1}{u^\pm}\left\{\int_x^{i\infty}f(z)dz_{k-2}\pm(-\rho_{k-2}(\varepsilon))\int_{-x}^{i\infty}f(z)dz_{k-2}\right\}\right]^\sigma$$

$$=\frac{1}{u_\sigma^\pm}\left\{\int_x^{i\infty}f^\sigma(z)dz_{k-2}\pm(-\rho_{k-2}(\varepsilon))\int_{-x}^{i\infty}f^\sigma(z)dz_{k-2}\right\}$$

がすべての有理数 $x$ に対して成り立つ．ここで $f^\sigma(z)$ は $f^\sigma(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^\sigma e^{2\pi inz/N}$ で定義される $S_k(\Gamma_N)$ の元とする．

証明は2つの部分からなる．

I. $x=\gamma(i\infty)$, $\gamma\in\Gamma_N$ の場合に定理を示すこと．

II. 任意の有理数 $x$ に対して問題の周期を I の場合の周期と $f$ の Fourier 係数とで具体的に表示すること．これから特に定理が I の場合に帰着されることがわかる．

3. Razar の方法．　I に関しては [5] における議論を，そこでの $\Gamma_0(N)$ を $\Gamma_N$ でおきかえてやればほとんど同じにできる．まず Shimura 同型によって

(1)　$H_p^1(\Gamma_N,\mathbb{C}^{k-1})=\delta(S_k(\Gamma_N))\oplus\overline{\delta(S_k(\Gamma_N))}$

が成り立つ．ここで記号 ‾ は $H_p^1(\Gamma_N,\mathbb{C}^{k-1})$ における自然な複素共役写像を表す．また

$$(g|[\varepsilon])(z) = \overline{g(-\bar{z})} \qquad (\ g \in S_k(\Gamma_N)\ ),$$
$$(Q|\tilde{\varepsilon})_\gamma = -\rho_{k-2}(\varepsilon)\, Q_{\varepsilon\gamma\varepsilon} \qquad (\ Q \in Z_p^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1}),\ \gamma \in \Gamma_N\ )$$

で $S_k(\Gamma_N)$ 上の $\mathbb{R}$-線型変換 $[\varepsilon]$ および $Z_p^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ 上の $\mathbb{C}$-線型変換 $\tilde{\varepsilon}$ を定義すれば

(2) $$\overline{\delta_0(g|[\varepsilon])} = \delta_0(g)|\tilde{\varepsilon} \qquad (\ g \in S_k(\Gamma_N)\ )$$

が成り立つ．さらに $S_k(\Gamma_N)$ 上の Hecke 作用素 $T_n$ に対応して $Z_p^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ 上の $\mathbb{C}$-線型変換 $\tilde{T}_n$ を

$$\begin{cases} (Q|\tilde{T}_n)_\gamma = \sum_i \rho_{k-2}(\alpha_i^\iota)\, Q_{\gamma_i} & (\ Q \in Z_p^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1}),\ \gamma \in \Gamma_N\ ) \\ \{\alpha_i\} = \{\ \eta_a \begin{pmatrix} a & bN \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a>0,\ ad=n,\ (a,N)=1,\ 0 \leq b < d\ \} \\ \alpha_i \gamma = \gamma_i \alpha_{j(i)} \end{cases}$$

によって定義する．ただし $\alpha_i^\iota = \det(\alpha_i)\alpha_i^{-1}$ で各 $a$ に対して $SL_2(\mathbb{Z})$ の元 $\eta_a$ で $\eta_a \equiv \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \pmod N$ なるものを１つ固定しておく．$\tilde{T}_n$ から導かれる $H_p^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ 上の $\mathbb{C}$-線型変換を $\hat{T}_n$ で表せば，そのとき

(3) $$\begin{cases} \delta(g|T_n) = \delta(g)|\hat{T}_n & (\text{すべての自然数 } n \text{ に対して}) \\ \delta_0(g|T_p) = \delta_0(g)|\tilde{T}_p & (\ p \equiv 1 \pmod N \text{ なるすべての素数 } p \text{ に対して}\ ) \end{cases}$$

が成り立つ．

いま $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z/N}$, $a_1 = 1$ をすべての $T_n$ の同時固有函数とする．このとき $(f|[\varepsilon])|T_n = \bar{a}_n (f|[\varepsilon])$, $n \geq 1$ であるが，(1), (3) によって $\{\hat{T}_n\}_{n\geq 1}$ の固有値 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ に属する同時固有空間

は $\delta_0(f)$ および $\overline{\delta_0(f|[\varepsilon])}$ の cohomology 類で張られることが容易にわかる．さらに２つの cocycles $\delta_0(f) \pm \overline{\delta_0(f|[\varepsilon])}$ を考えると，これらは (1), (2), (3) によって次の cocycle に関する条件を満足する．

$$
(4)\quad \begin{cases}
1.\ \text{すべての } n \text{ に対して } Cl(Q^{\pm})|\hat{T}_n = a_n Cl(Q^{\pm}). \\
2.\ Q^{\pm}|\tilde{\varepsilon} = \pm Q^{\pm}. \\
3.\ Q^{\pm}_{\left(\begin{smallmatrix}1 & N \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)} = 0. \\
4.\ \text{すべての素数 } p \equiv 1 \pmod{N} \text{ に対して } Q^{\pm}|\tilde{T}_p = a_p Q^{\pm}.
\end{cases}
$$

ただし $Cl(Q^{\pm})$ は $Q^{\pm}$ の属する cohomology 類を表す．

一方 $Z_P^1(\Gamma_N, \mathbb{C}^{k-1})$ は $Z_P^1(\Gamma_N, \mathbb{Q}^{k-1})$ にその基底をもち，したがって $\tilde{T}_n$, $\tilde{\varepsilon}$ はともに $\mathbb{Q}$ 上に定義される．それゆえ条件(4)を満足する自明でない cocycles $Q^{\pm}$ で $Z_P^1(\Gamma_N, K_f^{k-1})$ に属するものが存在する．また条件(4)の 1, 2 を満足する cohomology 類の空間はそれぞれ $\mathbb{C}$ 上１次元であるが，さらに条件 3, 4 でそれらの類の代表を正規化することによって(4)の４条件を満足する cocycle の空間も $\mathbb{C}$ 上１次元になる．よって定数 $u^{\pm} \neq 0$ が存在して

$$\delta_0(f) \pm \overline{\delta_0(f|[\varepsilon])} = u^{\pm} Q^{\pm}$$

とかける．また $Q^{\pm}$ の $\sigma$–共役 $(Q^{\pm})^{\sigma}$ が $f^{\sigma}$ に対して同様の性質(4)を有していることから定数 $u_{\sigma}^{\pm} \neq 0$ があって

$$\delta_0(f^{\sigma}) \pm \overline{\delta_0(f^{\sigma}|[\varepsilon])} = u_{\sigma}^{\pm} (Q^{\pm})^{\sigma}$$

とかけることもわかる．

3. 周期と Fourier 係数． いま $x$ を任意の有理数として固定する．奇素数 $p \equiv 1 \pmod N$ をとって Hecke 作用素

$$T_p = p^{\frac{k}{2}-1} \sum_i \alpha_i, \qquad \{\alpha_i\} = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \pm N \\ 0 & p \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 & \pm\frac{p-1}{2}N \\ 0 & p \end{pmatrix} \right\}$$

を考える．そのとき

補題． 1) 各 $\alpha_i$ に対して $\alpha_i'(x) = \alpha_i(x)$ なる $\alpha_i' \in \Gamma_N$ が存在する．

2) 関係式

$$\left\{ a_p - \sum_i \rho_{k-2}(\alpha_i^{\iota}\alpha_i') \right\} \left( \int_x^{i\infty} f(z)\,dz_{k-2} \pm (-\rho_{k-2}(\varepsilon)) \int_{-x}^{i\infty} f(z)\,dz_{k-2} \right\}$$

$$= \sum_i \rho_{k-2}(\alpha_i^{\iota}) \left\{ \delta_0(f)_{\alpha_i'} \pm \overline{\delta_0(f|[\varepsilon])}_{\alpha_i'} \right\}$$

が成り立つ．

3) 行列 $\sum_i \rho_{k-2}(\alpha_i^{\iota}\alpha_i')$ は次の形の行列と相似である．

$$\begin{pmatrix} 1+p^{k-1} & & & & * \\ & p+p^{k-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & p^{l}+p^{k-1-l} & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & p^{k-2}+p \end{pmatrix}.$$

が成り立つ．1) は $\alpha_i'(x) = \alpha_i(x)$, $\alpha_i' \in \Gamma_N$ を解くことによって得られ，さらにそれから 3) が得られる．2) は 1) および $f|T_p = a_p f$ より容易に得られる．

特にこの補題により2)における係数行列の可逆性すなわち $a_p$ がどの $p^l+p^{k-1-l}$ $(0\leqq l\leqq k-2)$ とも異なる素数 $p\equiv 1\pmod N$ の存在が保証されれば任意の有理数 $x$ に対して定理が証明されることになる．その保証は $k$ が偶数の場合は例えば Rankin の評価式 $a_n=O(n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{5}})$ から得られる．$k$ が奇数の場合は Deligne-Serre [1] から従う次の結果によって十分に保証される．

定理．$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi i n z}\in S_k(N,\chi)$ $(k\geqq 2)$ を normalized newform とする．そのとき素数の集合

$$\mathcal{P}=\{p\mid a_p^2=4\chi(p)p^{k-1},\ p\nmid N\}$$

の密度は0である．

証明．$K_f$ で完全分解する有理素数の無限集合を $\mathcal{L}$，各 $l$，$l\in\mathcal{L}$ に対して $f$ に付随する $l$-進表現 $\rho_l:Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\to GL_2(\mathbb{Z}_l)$ の reduction mod $l$ $\tilde{\rho}_l:Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\to GL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ の像を $G_l$ とする．$G_l$ の元でその特性多項式が重根をもつもの全体を $G_l^{\circ}$，また $P_l=\{\tilde{\rho}_l(Frob(p))\mid p\in\mathcal{P},\ p\neq l\}$ ($Frob(p)$ は $p$ に付随する Frobenius 置換）とするとき

$$(5)\qquad \inf_{l\in\mathcal{L}}\frac{\#P_l}{\#G_l}=0$$

をみることによって Tchebotarev の密度定理から上の主張が得られる．まず $G_l$ は次の4つの場合が考えられる．

i) $SL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)\subseteq G_l$.

ii) $G_l$ は $GL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ の Borel 部分群に含まれる.

iii) $G_l$ は $GL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ の Cartan 部分群 $C_l$ の正規化群 $N_l$ に含まれ $C_l$ 自身には含まれない.

iv) $G_l$ の $PGL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ における像は $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ のいずれかに同型である.

これらの4つの場合の中から無限個の $l\in\mathcal{L}$ に対して成立するような場合を選んで，それらの $l$ について $\inf {}^\# P_l/{}^\# G_l=0$ をみれば十分である. ii)～iv) の場合はだいたい同様なので，ここでは i) および iii) の場合だけを考えることにする. $P_l\subseteq G_l^0$ だから i) の場合は

$$\frac{{}^\# G_l^0}{{}^\# G_l}\leq\frac{2l}{l^2-1}$$

よりわかる. 以下 iii) の場合を考える. このとき $l\nmid {}^\# G_l$ であるから，$P_l$ の $PGL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ における像は自明となる. $G_l$ の $PGL_2(\mathbb{Z}_l/l\mathbb{Z}_l)$ における像の位数が有界でなければ (5) は明らかだから以下それらは有界と仮定する. いま $\tilde{\rho}_l$ と自然準同型 $N_l\to N_l/C_l=\{\pm1\}$ との合成写像を考えると $Nl$ を割る素数 $q_l$ が存在して $Frob(p)$ $(p\nmid Nl)$ のこの写像による像は平方剰余記号 $\left(\frac{p}{q_l}\right)$ と一致する. $\tilde{\rho}_l(Frob(p))\notin C_l$ ならば $tr\circ\tilde{\rho}_l(Frob(p))$ は 0 であるから $\left(\frac{p}{q_l}\right)=-1$ なる $p$ に対しては $a_p\equiv 0\pmod{l}$ が

また$\left(\frac{p}{q_\ell}\right)=+1$なる$p$に対しては$a_p^2\equiv\chi(p)p^{k-1}\{\zeta^{2e_\ell(p)}+\zeta^{-2e_\ell(p)}+2\}$ $(\mathrm{mod}\ \ell)$が成り立つ．ここで$\zeta$は$p,\ell$によらないある1の根で$e_\ell(p)\in\mathbb{Z}$である．もし無限個の$\ell$に対して$q_\ell=\ell$ならば$p\in P$に対して$\left(\frac{p}{\ell}\right)=+1$であることから$P$の密度は0である．したがって無限個の$\ell$に対して$q_\ell$は$N$を割る素数$q$に等しいと仮定する．そのとき先の合同式から$\left(\frac{p}{q}\right)=-1$ならば$a_p=0$，$\left(\frac{p}{q}\right)=+1$ならば$e(p)\in\mathbb{Z}$があって

$$a_p^2=4\chi(p)p^{k-1}\{\zeta^{2e(p)}+\zeta^{-2e(p)}+2\}$$

が成り立つ．これは$k$が偶数ならば$K_f/\mathbb{Q}$が有限次拡大であることに矛盾する．$k$が奇数の場合は$\chi_\ell$を$\ell$-adic cyclotomic characterとして$\varphi_\ell=\rho_\ell\otimes\chi_\ell^{-\frac{k-1}{2}}$を考えると，この$\ell$-進表現の指標は有限個の値しかとらないことになる．

補題．$GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$のコンパクト部分群$H$について，$\{\mathrm{tr}(x)\,|\,x\in H\}$が有限ならば$H$は有限群か，または$GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$の適当な元で同時に上半三角化され，その対角成分には有限個の1の根しか現われない．

したがって$\rho_\ell\cong\chi_\ell^{\frac{k-1}{2}}\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & *\\ 0 & \varepsilon_2\end{pmatrix}$（$\varepsilon_1,\varepsilon_2$は有限位数の指標）であるか，さもなくば$\varphi_\ell$の像は有限群となる．前者の場合はRankinの評価式$\sum_{p<x}|a_p|^2p^{-(k-1)}\sim\frac{x}{\log x}$ $(x\to\infty)$（[1]）に矛盾し，後者の場合も$f$に付随するゼータ函数がArtinの$L$函数になることから不合理を生じる（cf. [6]）．

# 文 献

[1] P. Deligne and J.P. Serre, Formes modulaires de poids 1, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. 7 (1974), 507–530.

[2] K. Hatada, Periods of primitive forms, Proc. Japan Acad. 53A (1977), 174–177.

[3] Y. Kadotera, Periods of cusp forms, to appear.

[4] Ju. I. Manin, Periods of parabolic forms and p-adic Hecke series, Mat. Sbornik, 92, 134 (1973), 378–401.

[5] M.J. Razar, Values of Dirichlet series at integers in the critical strip, Lecture Notes in Math., 627, 1976, 1–10.

[6] K.A. Ribet, Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus, Lecture Notes in Math., 601, 1976, 17–52.

[7] G. Shimura, Sur les intégrales attachées aux formes automorphes, J. Math. Soc. Japan, 11 (1959), 291–311.

[8] G. Shimura, The special values of zeta functions associated with cusp forms, Comm. Pure Appl. Math., 29 (1976), 783–804.

[9] G. Shimura, On the periods of modular forms, Math. Ann., 229 (1977), 211–221.

[10] V. V. Shokurov, Modular symbols of arbitrary weight, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 10 (1976), 95–96.