数理解析研究所講究録
第 418 巻 1981 年 95-107

移動平均過程の母数推定量の漸近的性質について

東大 工　西尾 敦

1. $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ を次式によって生成される定常 ARMA (p, q) 過程とする.

$$x_t - \sum_{s=1}^{p} \beta_s x_{t-s} = \varepsilon_t - \sum_{s=1}^{q} \alpha_s \varepsilon_{t-s}, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

ただし $\varepsilon_t \sim i.i.d.\ N(0, \sigma^2)$. 観測値 $\underset{\sim}{x} = (x_1, \cdots, x_n)'$ の確率密度関数 (p.d.f.) は

$$(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} x'\Sigma^{-1}x\right\} \tag{2}$$

で与えられる. ここで $\Sigma = Toepl(\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1})$, $\sigma^2\gamma_i = E\, x_t x_{t+i}$ である. 母数 $\underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_q)$, $\underset{\sim}{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_p)$, σ^2 の最尤推定量は (2) 式の最大化により得られる. しかし (2) 式は $\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta}$ に関して著しく非線型であり これを正確に求めることは 複雑な計算を必要とする. Hannan, Anderson[1] は (2) 式中の $x'\Sigma^{-1}x$ をそれぞれの方法により近似した量をもとに反復法を用いて推定量を得ることを提案し それらが漸近的に最尤推定量と同等であることを示した. Anderson[2] はまたそれぞれの近似が (1) 式において $x_0 = x_n, x_{-1} = x_{n-1}, \cdots, x_{1-p} =$

x_{n-p+1}, $\varepsilon_0=\varepsilon_n, \cdots, \varepsilon_{1-q}=\varepsilon_{n-q+1}$ あるいは, $x_0=x_{-1}=\cdots=x_{1-p}=0$, $\varepsilon_0=\cdots=\varepsilon_{1-q}=0$ としたモデルの分散行列 Ω を Σ の代わりに用いたものであることを示した。また Box-Jenkins は Backward forecasting を用いて $x'\Sigma^{-1}x$ を正確に計算する方法を提案した。これは一般最小2乗法と呼ばれる。近年は計算機の発達により比較的複雑な計算も処理可能となった。このことに応じて正確な尤度を求めるアルゴリズムも研究され正確な最尤推定も行なわれている。本稿では MA(1) 過程の母数 α の推定量のバイアス, 平均2乗誤差をそれぞれ $O(n^{-1})$, $O(n^{-2})$ まで求めることを試みるが 対象とする推定量は前述のことがらをふまえて, (i) 初期値を0とするモデルの最尤推定量 $\hat{\alpha}_{I0}$ (ii) Box-Jenkins の一般最小2乗推定量 $\hat{\alpha}_{BJ}$ (iii) 正確な最尤推定量 $\hat{\alpha}_{ML}$ の3種とした。

2. ここでの議論に便利なように 下述の3推定量を導く。$\{x_t, t\in Z\}$ を MA(1) 過程 すなわち

$$x_t = \varepsilon_t - \alpha\varepsilon_{t-1},\quad t=1,2,\cdots,n,\quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0,\sigma^2) \qquad (3)$$

とする。簡単のため $\sigma^2=1$ で既知とする。σ^2 が未知の場合については後に触れる。ε_0 を与えられたものとし (3) 式を再帰的に用いると, $\varepsilon_t = x_t+\alpha x_{t-1}+\cdots+\alpha^{t-1}x_1+\alpha^t\varepsilon_0$ である。$\underset{\sim}{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ の p.d.f. は $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon}'\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$ であり $\underset{\sim}{\varepsilon}$ と $\underset{\sim}{x}$ の変換のヤコビアンは1であるから $\underset{\sim}{x}$ の ε_0 を与えたとき

の条件付 p.d.f. は

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \{ \hat{\varepsilon}_t^{(\varepsilon_0)}(\alpha) \}^2 \tag{4}$$

$$\hat{\varepsilon}_t^{(\varepsilon_0)}(\alpha) = x_t + \alpha x_{t-1} + \cdots + \alpha^{t-1} x_1 + \alpha^t \varepsilon_0$$

$\underset{\sim}{x}$ の p.d.f. は (4) を ε_0 の周辺分布について積分することによって求まる。$\hat{\varepsilon}_t^{(\varepsilon_0)}(\alpha) = \hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha) + \alpha^t \varepsilon_0$ で $\hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha)$ は ε_0 を陽に含まないことに注意すると

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{x}, \alpha) &= \int (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \{ \hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha) + \alpha^t \varepsilon_0 \}^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \right] d\varepsilon_0 \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (1-a^2)(1-a^{2n+2})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \{ \hat{\varepsilon}_t^{(0)} \alpha \}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (1-a^2)^{\frac{1}{2}} (1-a^{2n+2})^{-\frac{1}{2}} \{ \sum_{t=1}^{n} \alpha^t \hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha) \}^2 \right] \end{aligned} \tag{5}$$

となる。このことから $\hat{\alpha}_{\varepsilon_0}$, $\hat{\alpha}_{BC}$, $\hat{\alpha}_{ML}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mu(a) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \{ \hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha) \}^2 \\ \lambda(a) &= \mu(a) + \frac{1}{2} (1-a^2)^{\frac{1}{2}} (1-a^{2n+2})^{-\frac{1}{2}} \{ \sum_{t=1}^{n} \alpha^t \hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha) \}^2 \\ \nu(a) &= \lambda(a) + \frac{1}{2} \log (1-a^2)(1-a^{2n+2})^{-1} \end{aligned} \tag{6}$$

の最大化により得られる推定量であることがわかる。

3. $L(a)$ を $\mu(a)$, $\lambda(a)$, $\nu(a)$ のいずれかとし $\hat{\alpha}$ を $L(a)$ に基づく α の推定量とする。$\hat{\alpha}$ は $\frac{\partial}{\partial a} L(\hat{\alpha}) = 0$ を満足する。簡単のため以下では $\frac{\partial^i}{\partial a^i}$ を ∂^i で表わす。$\partial L(a)$ を α のまわりで展開し 方程式 $\partial L(\hat{\alpha}) = \partial L(\alpha) + (\hat{\alpha} - \alpha) \partial^2 L(\alpha) + \frac{1}{2} (\hat{\alpha} - \alpha)^2 \partial^3 L(\alpha) + \cdots = 0$ にラグランジュの展開公式を適用して $(\hat{\alpha} - \alpha)$ について解くと (Shenton & Bowmann 参照)

$$\hat{\alpha} - \alpha = \sum_{j=1}^{\infty} A_1^j B_j \tag{7}$$

と表わされる．ここで，$A_i = \partial^i L(\alpha)/\partial^2 L(\alpha)$，$(i=1,\cdots,)$

$B_1=-1$，$B_2=-A_3/2$，$B_3=(A_4-3A_3^2)/6$，$\cdots$ である．

記号 I_i，$\Delta\partial^i L$，$\Gamma_{i_1\cdots i_p}$ 等を次式のように定義する．

$$I_i = E\,\partial^i L(\alpha)\ ,$$

$$\Delta\partial^i L(\alpha) = \partial^i L(\alpha) - E\,\partial^i L(\alpha)\ ,$$

$$\Gamma_{i_1\cdots i_p} = E(\Delta\partial^{i_1} L(\alpha))(\Delta\partial^{i_2} L(\alpha))\cdots(\Delta\partial^{i_p} L(\alpha))\ .$$

(7) 式の右辺の各項に現われる A_i を

$$A_i = \partial^i L(\alpha)/\partial^2 L(\alpha) = (I_i + \Delta\partial^i L(\alpha))/(I_2 + \Delta\partial^2 L(\alpha))$$

$$= I_2^{-1}(I_i + \Delta\partial^i L(\alpha))\{1 - \Delta\partial^2 L(\alpha)\cdot I_2^{-1} + (\Delta\partial^2 L(\alpha) I_2^{-1})^2 - \cdots\}$$

と表わして (7) 式の右辺の期待値を項別にとる．また，6 節で示すように，

$$\Gamma_{i_1\cdots i_p} = O(n^{[\frac{p}{2}]})\ ,\quad I_2 = O(n)$$

である．ただし，$[x]$ は x を越えない最大の整数とする．

これより

$$E(\hat{\alpha}-\alpha) = -I_1 I_2^{-1} + (\Gamma_{12} + I_3/2) I_2^{-2} + O(n^{-2}) \qquad (8).$$

を得る．(7) 式の両辺を 2 乗して同様の操作を行うと，

$$E(\hat{\alpha}-\alpha)^2 = (I_1^2 + \Gamma_{11}) I_2^{-1} - \{I_1(4\Gamma_{12} + 3I_3) + 2\Gamma_{112} + 3\Gamma_{12}\} I_2^{-3} + (I_3\Gamma_{111} + \Gamma_{1113} + 2\Gamma_{1122}) I_2^{-4} - \frac{1}{3} I_2^{-5} I_4 \Gamma_{1111} + \frac{5}{4} I_3^2 \Gamma_{1122} I_3^{-6} + O(n)$$

後述のように

$$\Gamma_{1111} = 3\Gamma_{11}^2 = 3I_2^2 + O(n)$$

$$\Gamma_{1122} = 2\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{11}\Gamma_{22} + O(n)$$
$$\Gamma_{1113} = 3\Gamma_{11}\Gamma_{13} + O(n) \qquad (8)'$$

であることを用いて整理すると，

$$E(\hat{\alpha}-\alpha)^2 = (I_1^2 + H_{11}) I_2^{-2} - I_1(4H_{12} + 3I_3) I_2^{-3}$$
$$- (2\Gamma_{112} + 3\Gamma_{22} + 3\Gamma_{13} + I_4) I_2^{-3}$$
$$+ (I_3\Gamma_{111} + 6\Gamma_{12}^2 + 12 I_3\Gamma_{12} + \frac{15}{4} I_3^2) I_2^{-4}$$
$$+ O(n^{-3}) \qquad (9)$$

となる．6節で述べる方法により (8)，(9) 式中の各項を計算した結果を示すと，

$\hat{\alpha}_{ML}$ について

$$I_1 = 0.$$
$$-I_2 = n(1-\alpha^2)^{-1} - (1-\alpha^2)^{-1} - 4\alpha^2(1-\alpha^2)^{-2}$$
$$\Gamma_{11} = -I_2.$$

$\hat{\alpha}_{BJ}$ について．

$$I_1 = \alpha(1-\alpha^2)^{-1}$$
$$-I_2 = n(1-\alpha^2)^{-1} - 2(1-\alpha^2)^{-1} - 6\alpha^2(1-\alpha^2)^{-2}$$
$$\Gamma_{11} = n(1-\alpha^2)^{-1} - (1-\alpha^2)^{-1} - 4\alpha^2(1-\alpha^2)^{-2} \qquad (9)'$$

$\hat{\alpha}_{I_0}$ について．

$$I_1 = -\alpha^3(1-\alpha^2)^{-2}$$
$$-I_2 = n(1-\alpha^2)^{-1} - (1-\alpha^2)^{-1} + 4\alpha^4(1-\alpha^2)^{-3}$$
$$\Gamma_{11} = n(1-\alpha^2)^{-1} - (1-\alpha^2)^{-1} + 4\alpha^4(1-\alpha^2)^{-3}$$

$$+ \alpha^4(1-\alpha^2)^{-3} + 2\alpha^6(1-\alpha^2)^{-4}$$

また　他の項は　3推定量について共通に

$$I_3 = -6n\alpha(1-\alpha^2)^{-2} + O(1)$$

$$I_4 = -12n\{(1-\alpha^2)^{-2} + 4\alpha^2(1-\alpha^2)^{-3}\} + O(1)$$

$$\Gamma_{12} = 4n\alpha(1-\alpha^2)^{-2} + O(1) \qquad (9)'$$

$$\Gamma_{13} = 6n\alpha\{(1-\alpha^2)^{-1} + 4\alpha^2(1-\alpha^2)^{-3}\} + O(1)$$

$$\Gamma_{22} = 2n\{3(1-\alpha^2)^{-2} + 10\alpha^2(1-\alpha^2)^{-3}\} + O(1)$$

$$\Gamma_{111} = -6n\alpha(1-\alpha^2)^{-2} + O(1)$$

$$\Gamma_{112} = -4n\alpha\{2(1-\alpha^2)^{-2} + 7\alpha^2(1-\alpha^2)^{-3}\} + O(1)$$

である．以上の諸結果を　(8)，(9)式に代入して　各推定量のバイアス，平均2乗誤差は

$$E(\hat{\alpha}_{ML} - \alpha) = \alpha/n + O(n^{-2})$$

$$E(\hat{\alpha}_{BJ} - \alpha) = 2\alpha/n + O(n^{-2}) \qquad (10)$$

$$E(\hat{\alpha}_{I_0} - \alpha) = \{\alpha - \alpha^3(1-\alpha^2)^{-1}\}/n + O(n^{-2})$$

$$E(\hat{\alpha}_{ML} - \alpha)^2 = (1-\alpha^2)^{-1}/n + (9 + 2\alpha^2)/n^2 + O(n^{-3})$$

$$E(\hat{\alpha}_{BJ} - \alpha)^2 = (1-\alpha^2)^{-1}/n + (11 + 3\alpha^2)/n^2 + O(n^{-3}) \qquad (11)$$

$$E(\hat{\alpha}_{I_0} - \alpha)^2 = (1-\alpha^2)^{-1}/n + \{9 - \alpha^2 - 8\alpha^4(1-\alpha^2)^{-1} + 3\alpha^6(1-\alpha^2)^{-2}\}/n^2 + O(n^{-3})$$

で与えられる．

4．さて　バイアスが　(10)　式によって与えられるので　これを用いて　バイアス修正した　推定量が考えられる．以

下では修正推定量を * をつけて表わす．一般に適当な正則条件の下で母数 α の推定量について十分滑らかな関数 $f(\alpha)$ があって

$$E(\hat{\alpha}-\alpha) = f(\alpha)/n + O(n^{-2})$$

であることがわかっている場合 $\hat{\alpha}$ を修正した推定量 $\hat{\alpha}^*$ を

$$\hat{\alpha}^* = \hat{\alpha} - f(\hat{\alpha})/n$$

とおけば容易に

$$E(\hat{\alpha}^*-\alpha) = O(n^{-2})$$

$$E(\hat{\alpha}^*-\alpha)^2 = \{1-2f'(\alpha)/n\}^2 V(\hat{\alpha}) + O(n^{-3}) \qquad (12)$$

であることがわかる．考えている 3 推定量について (12) 式は

$$E(\hat{\alpha}_{ML}^*-\alpha)^2 = (1-\alpha^2)^{-1}/n + (7+3\alpha^2)/n^2 + O(n^{-3})$$

$$E(\hat{\alpha}_{BJ}^*-\alpha)^2 = E(\hat{\alpha}_{ML}^*-\alpha)^2 \qquad (13)$$

$$E(\hat{\alpha}_{I_0}^*-\alpha)^2 = (1-\alpha^2)^{-1}/n + \{7+3\alpha^2(1-\alpha^2)^{-1}+2\alpha^4(1-\alpha^2)^{-2}\}/n^2 + O(n^{-3})$$

となる．$\hat{\alpha}_{ML}^*$ と $\hat{\alpha}_{BJ}^*$ が同等である理由はバイアス修正を次のように行ってもよいことから理解される．すなわち (4) 式においてこれが 0 となるように I_1 を定める．これはデータに依存せず母数の関数として与えられる．$\hat{\alpha}_{ML}$ と $\hat{\alpha}_{BJ}$ の差はすなわち $\mu(\alpha)$ と $\nu(\alpha)$ の差はデータに依存しないからバイアス修正を上のように行えば全く同じ推定量をうる．

5. $\sigma^2 = E\,\varepsilon_t^2$ が未知の場合について若干考察を加える．簡単のため $\sigma^2 = 1$ とする．(4), (5) 式を σ^2 を含む式に書き

直すと容易に $\hat{\alpha}_{BJ}$, $\hat{\alpha}_{I_0}$ は σ^2 が未知であっても変わらないことがわかる．σ^2 を含む正確な対数尤度 $L(\alpha, \sigma^2)$ は (6) 式の $\lambda(\alpha)$ を用いて．

$$L(\alpha, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 + \frac{1}{2}\log(1-\alpha^2) + \frac{1}{\sigma^2}\lambda(\alpha)$$

となる．α．σ^2 について偏微分して 0 とおくと最尤推定量 $\hat{\alpha}$，$\hat{\sigma}^2$ は次式により得られる．

$$-\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha}^2)^{-1} + \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\partial\lambda(\hat{\alpha}) = 0 \tag{14}$$

$$-\frac{n}{2}\frac{1}{\hat{\sigma}^2} - \frac{1}{\hat{\sigma}^4}\lambda(\hat{\alpha}) = 0 \tag{15}$$

(15) 式を (14) 式に代入して

$$\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha}^2)^{-1}\frac{2}{n}\lambda(\hat{\alpha}) + \partial\lambda(\hat{\alpha}) = 0 \tag{16}$$

をうる．(16) 式の左辺を $\partial\nu'(\hat{\alpha})$ として 3 節の議論をそのまま適用できる．α を真の値とするとき $E\lambda(\alpha) = -\frac{n}{2}$ であることがわかるから

$$\begin{aligned}\partial\nu'(\alpha) &= \alpha(1-\alpha^2)^{-1}\frac{2}{n}\left(\lambda(\alpha)+\frac{n}{2}\right) - \alpha^2(1-\alpha^2)^{-1} + \partial\lambda(\alpha)\\ &= \alpha(1-\alpha^2)^{-1}\frac{2}{n}(\lambda(\alpha) - E\lambda(\alpha)) + \partial\nu(\alpha)\end{aligned}$$

$E\,\partial\lambda(\alpha) = O(1)$, $E(\lambda(\alpha) - E\lambda(\alpha))(\partial\lambda(\alpha)) = O(1)$, $E(\lambda(\alpha) - E\lambda(\alpha))^2 = O(n)$ であることが示されるから

$$E\,\partial\nu'(\alpha) = E\,\partial\nu(\alpha) = 0$$

$$E\,\partial^2\nu'(\alpha) = E\,\partial^2\nu(\alpha) + \alpha(1-\alpha^2)^{-1}\cdot\frac{2}{n}E\,\partial\lambda(\alpha) = E\,\partial^2\nu(\alpha) + O(n^{-1})$$

$$\begin{aligned}E(\partial\nu'(\alpha))^2 &= E(\partial^2\nu(\alpha))^2 + \alpha(1-\alpha^2)^{-1}\frac{4}{n}E(\nu(\alpha) - E\nu(\alpha))\cdot\partial\nu(\alpha)\\ &\quad + \frac{4}{n^2}\alpha^2(1-\alpha^2)^{-1}E(\lambda(\alpha) - E\lambda(\alpha))^2\end{aligned}$$

$$= E(\partial V(\alpha))^2 + O(n^{-1})$$

である．(8)，(9)式に現われる他の項への影響も higher order になるから σ^2 が未知のときも (10)，(11)式の結果は変更されないことがわかる．

6．最後に途中で用いた尤度の微係数のモーメントの導出などについて述べる．$\underset{\sim}{y} = (y_1, \cdots, y_p)'$ とする．$\underset{\sim}{y}$ のモーメント $\mu_{i_1 \cdots i_k} = E\, y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_k}$　$k = 1, 2, \cdots,\ i_1, i_2, \cdots, i_k = 1, \cdots, p$ は $\underset{\sim}{y}$ のキュムラント $\lambda_{j_1 \cdots j_l}$　$l \leqq k$ を用いて表わされる．とくに中心モーメント $\mu'_{i_1 \cdots i_k}$ は

$$\mu_{i_1 i_2} = \lambda_{i_1 i_2}$$

$$\mu_{i_1 i_2 i_3} = \lambda_{i_1 i_2 i_3}$$

$$\mu_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda_{i_1 i_2 i_3 i_4} + \lambda_{i_1 i_2}\lambda_{i_3 i_4} + \lambda_{i_1 i_3}\lambda_{i_2 i_4} + \lambda_{i_1 i_4}\lambda_{i_2 i_3}$$

$$\cdots$$

一般に，$\mu_{i_1 \cdots i_k}$

$$= \sum_{l=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{\substack{r_1 + \cdots + r_l = k \\ r_1, \cdots, r_l \geqq 2}} \Sigma' \lambda_{j_1 \cdots j_{r_1}} \lambda_{j_{r_1+1} \cdots j_{r_1+r_2}} \cdots \lambda_{j_{r_1+\cdots+r_{l-1}+1} \cdots j_k} \qquad (12)$$

である．ただし $j_1, \cdots, j_k$ は $i_1, \cdots, i_k$ の並べかえであり Σ' は $i_1, \cdots, i_k$ をそれぞれの個数が $r_1, \cdots, r_l$ である l 個の組に分けるわけ方すべてについての和を表わす．

$\underset{\sim}{y} \sim N_p(0, \Sigma)$，$\Sigma = (\sigma_{ij})$ とし $\underset{\sim}{z} = (z_1, \cdots, z_p)$ $= (y_1^2, \cdots, y_p^2)$ とすると $\underset{\sim}{z}$ は $\underset{\sim}{y}$ から生成される Wishart

行列の対角成分からなるベクトルである．このWishart行列のキュムラント母関数 $\psi(T)$ $(T=(t_{ij}))$ は

$$\psi(T) = \log E \exp t_{ij} y_i y_j$$
$$= -\frac{1}{2} \log |I - 2T*|$$
$$= \mathrm{tr}\, T* + \frac{2}{2} \mathrm{tr}(T*)^2 + \frac{2^2}{3} \mathrm{tr}(T*)^3 + \cdots \qquad (18)$$

であるから　k 次のキュムラント $\lambda_{i_1 \cdots i_k}$ は (18) で $t_{i_1 i_1} \cdots t_{i_k i_k}$ の係数から

$$\lambda_{i_1 \cdots i_k} = \frac{2^{k-1}}{k} \Sigma\, \sigma_{i_{j_1} i_{j_2}} \sigma_{i_{j_2} i_{j_3}} \cdots \sigma_{i_{j_k} i_{j_1}} \qquad (19)$$

である．ただし $j_1, \cdots, j_k$ は $1, 2, \cdots, k$ の並べかえであり Σ はすべての順列についての和である．4次までのキュムラントは

$$\lambda_{i_1} = \sigma_{i_1 i_1}, \quad \lambda_{i_1 i_2} = 2\sigma_{i_1 i_2}^2, \quad \lambda_{i_1 i_2 i_3} = 8 \sigma_{i_1 i_2} \sigma_{i_2 i_3} \sigma_{i_3 i_1},$$
$$\lambda_{i_1 i_2 i_3 i_4} = 16 (\sigma_{i_1 i_2} \sigma_{i_2 i_3} \sigma_{i_3 i_4} \sigma_{i_4 i_1} + \sigma_{i_1 i_2} \sigma_{i_2 i_4} \sigma_{i_4 i_3} \sigma_{i_3 i_1}$$
$$+ \sigma_{i_1 i_3} \sigma_{i_3 i_2} \sigma_{i_2 i_4} \sigma_{i_4 i_1}) \qquad (19)'$$

である．

さて．本稿で用いた(擬似)尤度 $L(a)$ の微係数のモーメントは次のようにすれば求まる．I_k は．$\phi(a) = E L(a)$ とすると．$L(a)$ は a の関数としては多項式であるから微分と期待値の順序を交換して

$$I_k = E\, \partial^k L(a) = \frac{\partial^k}{\partial a^k} \phi(a),$$

$\Gamma_{i_1 \cdots i_k}$ は．$\phi(a_1, \cdots, a_k) = E \prod_{j=1}^{k} (L(a_j) - E L(a_j))$ として

$$\Gamma_{i_1\cdots i_k} = \frac{\partial^{i_1}}{\partial a_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_k}}{\partial a_k^{i_k}} \phi(\alpha,\cdots,\alpha)$$

である．以下の記述では $L(a) = \mu(a)$ とする．他の場合もほとんど同様である．

$$L(a) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^{(0)2}(a)$$

であるから

$$\phi(a_1,\cdots,a_k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{t_1=1}^{n} \cdots \sum_{t_k=1}^{n} E \prod_{j=1}^{k} \left\{ \hat{\varepsilon}_{t_j}^{(0)2}(a_j) - E\,\hat{\varepsilon}_{t_j}^{(0)2}(a_j) \right\}. \quad (20)$$

$\hat{\varepsilon}_t(a)$ は正規過程 $\{x_t\}$ の線型関数であるから，平均 0 の正規分布をし

$$E\ \hat{\varepsilon}_{t_{i_1}}^{(0)}(a_{i_1})\ \hat{\varepsilon}_{t_{i_2}}^{(0)}(a_{i_2})$$

$$= 1 + (a_{i_1}-\alpha)(a_{i_2}-\alpha)(1-a_{i_1}a_{i_2})^{-1}(1-(a_{i_1}a_{i_2})^{t_{i_1}-1}) + \alpha^2 (a_{i_1}a_{i_2})^{t_{i_1}-1}, \quad t_{i_1} = t_{i_2}$$

$$(a_{i_1}-\alpha)\,a_{i_1}^{t_{i_1}-t_{i_2}-1} + (a_{i_1}-\alpha)(a_{i_2}-\alpha)(1-a_{i_1}a_{i_2})^{-1}(1-(a_{i_1}a_{i_2})^{t_{i_2}-1})$$

$$+ \alpha^2\, a_{i_1}^{t_{i_1}-1} a_{i_2}^{t_{i_2}-1}, \qquad t_{i_1} > t_{i_2} \qquad (21)$$

である．$\underset{\sim}{z} = (\hat{\varepsilon}_{t_1}^{(0)2}(a_1),\cdots,\hat{\varepsilon}_{t_p}^{(0)2}(a_p))$ のキュムラントを $\lambda_{i_1\cdots i_k}(t_{i_1},\cdots,t_{i_k})$ とするとこれは (21) 式を (19) 式に代入して得られる．(17) 式から (20) 式中の

$$E \prod_{j=1}^{p} \left\{ \hat{\varepsilon}_{t_j}^{(0)2}(a_j) - E\,\hat{\varepsilon}_{t_j}^{(0)2}(a_j) \right\}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{[\frac{p}{2}]} \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_\ell = p \\ r_1,\cdots,r_\ell \geq 2}} \sum \lambda_{j_1\cdots j_{r_1}}(t_{j_1},\cdots,t_{j_{r_1}}) \cdots \lambda_{j_{r_1+\cdots+r_{\ell-1}+1}\cdots j_p}(t_{j_{r_1+\cdots+r_{\ell-1}+1}},\cdots,t_{j_p}) \qquad (22)$$

となる．さて，証明は省略するが k についての帰納法により次の補題が成立する．

補題　上で定義された $\lambda_{i_1\cdots i_k}(t_{i_1},\cdots,t_{i_k})$ について．

$$\sum_{t_{i_1}=1}^{n}\cdots\sum_{t_{i_k}=1}^{n}\lambda_{i_1\cdots i_k}(t_{i_1},\cdots,t_{i_k})$$
$$= A(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})\,n + B(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})$$
$$+ C_1(a_{i_1},\cdots,a_{i_k},n)\,b_1^n + \cdots + C_\ell(a_{i_1},\cdots,a_{i_k},n)\,b_\ell^n \quad (23)$$

が成り立つ．ただし A，B，$C_1,\cdots,C_\ell$ は $a_{i_1},\cdots,a_{i_k}$ について何回でも微分可能．$C_1,\cdots,C_\ell$ は n については多項式，ℓ はある整数，$b_1,\cdots,b_\ell$ は $a_{i_1},\cdots,a_{i_k}$ によって定まる絶対値が1より小さい定数である．

(22)式を，$t_1,\cdots,t_p$ について加えることによって $\phi(a_1,\cdots,a_p)$ が求まるが (22)式中 右辺の各項で 各 t_i は1度しか現われないことに注意して補題を用いると $\phi(a_1,\cdots,a_p)$ は (23)の形の関数のたかだか $\left[\frac{p}{2}\right]$ 個の積の関数の有限個の和で表わされることがわかる．したがって

$$\Gamma_{i_1\cdots i_p} = O(n^{[\frac{p}{2}]})$$

が証明される．$\phi(a)$，$\phi(a_1,\cdots,a_k)$，$k=2,3,4$ を上述の方法により (21)式を用いて具体的に計算すれば (8)′，(9)′式などに記した結果が得られる．

参考文献

Anderson, T. W. [1] (1975) Maximum likelihood estimation of parameters of autoregressive processes with moving average residuals and other covariance matrices with linear structure. Ann. Stat. 3, 1283–1304

Anderson, T. W. [2]. (1977). Estimation for autoregressive moving average models in the time and frequency domains. Ann. Stat. 5, 842–865.

Box, G. E. P. &. Jenkins, G. M. (1970). Time Series Analysis, Forecasting and Control. Holden-Day.

Hannan, E. J. (1969). The estimation of mixed moving average autoregressive systems. Biometrika 56, 579–594.

Shenton, L. R. &. Bowmann, K. O. (1977). Maximum Likelihood Estimation in Small Samples. Griffin.