数理解析研究所講究録
第 420 巻 1981 年 45-61



# 時間おくれをもつ拡散方程式

広大 理 吉田 清

生物生態学において方程式をたてる際，時間遅れの効果を考慮するとその方程式はより現実的なものとなる。拡散を伴った時間遅れの有名なモデルの一つに Volterra - Hutchinson の方程式

(0.1) $\dot{U} = d\Delta U + a(1 - U(t-r,x)/K)U,\ t \in R,\ x \in \Omega\ (\cdot = \frac{\partial}{\partial t})$

が挙げられる。この時，$a$, $d$, $r$ 及び $K$ は正の定数である。$U$ は個体密度（population density）を，$\Omega$ は $R^n$（$n = 1, 2, 3$）の有界領域を表わす。

初期条件： $U(t,x) = \varphi(t,x) \quad -r \leqq t \leqq 0$

Neumann 条件： $\frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$

の下で（0.1）の $t > 0$ における大域的非負解の存在は容易に知られる。又時間遅れがない場合，すなわち $r = 0$ の場合、空間一様な定常解 $U = K$ は安定である。所が J. Lin and P. B. Kahn [4] による数値解析によると，拡散係数 $d$ が小さく，

遅れ r が大きい時 K は安定性を失い、カオスが起る事が報告されている。ここでは J. Lin and P. B. Kahn の主張を証明する才一歩として，r が大きい時 K より K の周りに時間的周期解が分枝する事を示す。そこで $U = K(1+u)$ と変換すると，u は

$$(0.2) \qquad \dot{u} = d\Delta u - a\,u(t-r, x)(1+u)$$

を満たす．D. Stirzaker [6] は野ねずみの数が時間とともにある一定値の周りで周期的に変動する事を説明する為、出生率が成長に要する時間によるとして導びかれた方程式に、拡散効果を考慮（J. D. Murray [5] を参照）したのが

$$(0.3) \qquad \dot{u} = d\Delta u - a\,u(t-r, x) + b u^3(t-r, x)$$

である。但し $a, d, r$ は前と同様正の定数で，b はある実数である。今一度ここでの目的を再記すると，斉次 Neumann 境界条件の下で，(0.2) 及び (0.3) の零の周りの時間的周期解の存在を示す。この事は、Hopf 分枝定理を証明し，それを適用する事によって示される。この時分枝パラメーターとして r をとる。以下において，(0.2) 及び (0.3) の解析はほとんど同じであるので，ここでは (0.3) に対してのみ解析する。又ここでの目的ー時間的周期解の存在ーには、拡散係数の大きさの影響が顕著にあらわれない。従って、以後 $d = 1$ と仮定する。故に取り扱う方程式は

$$(0\cdot4)\quad \begin{cases} \dot{u} = \Delta u - a\,u(t-r,x) + b\,u^3(t-r,x) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

である。（0・4）に対する Hopf 分枝定理の記述及び証明の必要性から，（0・4）を Banach 空間値の常微分方程式（あるいは積分方程式に直す。これは §1 で行なう。§2 では解写像のスペクトルを使って特性方程式を定義し、§3 で、§1 で導びかれた積分方程式を、基礎になっている Banach 空間をスペクトル分解して、有限次元の部分とその残りの無限次元の部分とに分ける。これは §4 で行われる，Hopf 分枝定理の証明の基礎となる交代定理（定理 4・1）に使われる。§5 では特性根の実部がすべて負の時（0・4）の零解は漸近安定である事を言う。§6 で Hopf 分枝定理を示し、§7 でこの定理を適用して，$ra = \pi/2$ で第 0 モードの周期解が最初の分枝解として現われる事を言う。

## §1 定数変化の公式

ここでは線型方程式

$$(1\cdot1)\quad \begin{cases} \dot{u} = \Delta u - a\,u(t-r,x) + f & \text{in } (\sigma,\infty)\times\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u_\sigma(\theta,x) = \varphi(\theta,x) & -r \leqq \theta \leqq 0 \end{cases}$$

を考える。但し、$u_t(\theta,x)$，$-r\leqq\theta\leqq0$，は J. Hale [2] の記号で

$u_\sigma(\theta, x) = u(\sigma+\theta, x)$ を表わす。ここで考察する事は(1.1)をある意味でBanch空間値の常微分方程式とみなされる事を言う。まず記号及び関数空間の説明から初める。本稿では以下すべて実数値である。$H^k(\Omega)$は位数$k$のSobolev空間でそのnormを$\|\cdot\|_k$とかく。$H^2_N(\Omega)$を$H^2_N(\Omega)=\{u\in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ on } \partial\Omega\}$と定義する。$C([a,b] ; L^2(\Omega))$を$L^2(\Omega)$値の$[a,b]$上連続関数全体の空間とし，$[a,b]=[-r,0]$のとき$C=C([-r,0] ; L^2(\Omega))$と略記する。$L^1_{loc}([a,b) ; L^2(\Omega))$は$L^2(\Omega)$に値をとる$[a\ b)$上の局所$L^1$関数の全体としよう。$A$を斉次Neumann条件つき$-\Delta$の$L^2(\Omega)$での表現とする。この時$A$の定義域$D(A)$は$H^2_N(\Omega)$に等しく，$A$は正則半群$\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$を構成する。そして(1.1)は

$$(1.2)\quad \begin{cases} u(t,x) = e^{-(t-\sigma)A}u(\sigma,\cdot) - a\int_\sigma^t e^{-(t-s)A}u_s(-r,\cdot) + \int_\sigma^t e^{-(t-s)A}f(s,\cdot)ds \\ u_\sigma = \varphi \end{cases}$$

と書ける。さて，$f\in L^1_{loc}([\sigma,\infty) ; L^2(\Omega))$，$\varphi\in C$に対し，(1.2)の解$u$は一意的に$C([-r,\infty) ; L^2(\Omega))$に存在し

$$\|u_t\|_C \leq Ke^{K(t-\sigma)}\left(\|\varphi\|_C + \int_\sigma^t \|f(s)\|_0 ds\right)$$

をみたす。但し$\|\cdot\|_C$は$C$の，$\|\cdot\|_0$は$L^2(\Omega)$のnormをあらわす。今この解を$u(\sigma,\varphi,f)$と書く事にする時，$C$から$C$の解写像$T(t,\sigma)$を

$$T(t,\sigma) = \mathcal{U}_t(\sigma, \varphi, 0)\cdot$$

で定義する．

命題1.1　$\{T(t,\sigma)\}_{t\geq\sigma}$ はC上の強連続半群をなし，$T(t,\sigma)$ は $t > r+\sigma$ でコンパクトである。

今我々の方程式は自励系であるから，$T(t,\sigma)$を $T(t-\sigma)$ で書きあらわす事にする。

定理1.1　$u(\sigma,\varphi,f)$ は

$$u_t(\sigma,\varphi,f) = T(t-\sigma)\varphi + \int_\sigma^t T(t-s)X_0 f(s)\,ds$$

と書ける。但し

$$X_0 = X_0(\theta,x) = \begin{cases} 0 & , -r \leq \theta < 0 \\ 1 & \theta = 0 \end{cases}$$

とする。

§2　T(t) の生成作用素のスペクトルー特性根の定義

T(t)の生成作用素をBと書き、Bの定義域をD(B)としよう。$-r \leq \theta < 0$ のとき、十分小さな $t\,(>0)$ と $\varphi \in D(B)$ に対して，$T(t)\varphi = \varphi(t+\theta, x)$ が成り立つ。従って

$$B\varphi(\theta) = \lim_{t\to 0}\,(T(t)\varphi - \varphi)/t = \dot{\varphi}(\theta)$$

次に $\theta = 0$ の場合は，$0 < t < r$ に対して，

$$T(t)\varphi = e^{-tA}\varphi(0) - a\int_0^t e^{-(t-s)A}\varphi_s(-r)\,ds,$$

であるから

$$B\varphi(0) = \lim_{t\to 0}\,(T(t)\varphi - \varphi)/t$$
$$= -A\varphi(0) - a\,\varphi(-r) \quad 。$$

以上の事より，$\varphi\in D(B)$ に対して，$B\varphi = \dot\varphi$ であり

$$D(B) = \{\varphi\in C\,;\,\dot\varphi\in C,\ \varphi(0)\in D(A),\ \dot\varphi(0) = -A\varphi(0) - a\,\varphi(-r)\}\ 。$$

さて $\lambda$ を複素数として $\Delta(\lambda)$ を $L^2(\Omega)$ 上の閉作用素で

(2.1) $\quad \Delta(\lambda)\alpha = \lambda\alpha + A\alpha + a\,e^{-\lambda r}\alpha \quad ,\ \alpha\in D(A)$

と定義する。

命題2.1　$\sigma(B)$ を $B$ のスペクトル全体の集合とする。このとき、$\lambda\in\sigma(B)$ である為の必要十分条件は

(2.2) $\quad \Delta(\lambda)\alpha = 0 \quad$ for some $\alpha\,(\neq 0)\in D(A)$.

$A$ は斉次 Neumann 境界条件付き $-\Delta$ の $L^2(\Omega)$ での表現であったから、$A$ の固有値 $\xi_j$，$j=0,1,2\cdots$，は $0=\xi_0<\xi_1\leqq\xi_2\leqq\cdots\to\infty$ をみたす。従って、$\lambda$ が (2.1) を満たす事と，ある $\xi_\ell$ が存在して，$\lambda + ae^{-\lambda r} + \xi_\ell = 0$ を満たす事は同値である。この事から $\sigma(B)$ は点スペクトル全体 $P\sigma(B)$ に等しく又任意の実数 $k$ に対して，$\{\lambda\in\sigma(B)\,;\,\mathrm{Re}\,\lambda\geqq k\}$ は有限集合である事が証明される。我々は $\sigma(B)$ の元，すなわち $\lambda + ae^{-\lambda r} + \xi_j = 0$, $j=0,1\cdots$

の根を特性根と呼ぶ。$P_\lambda$ を $\lambda \in \sigma(B)$ に対する一般化された固有空間とし、$N(B-\lambda I)^k$ を $(B-\lambda I)^k$ の *null space* とする。

命題 2.2 (cf. [7. Theorem 3. p.229]) $P_\lambda$ の次元は有限であり、ある整数 $k$ が存在して

$$P_\lambda(B) = N(B-\lambda)^k, \quad C = N(B-\lambda I)^k \oplus R(B-\lambda I)^k \text{。}$$

$d$ を $P_\lambda$ の次元で, $\Phi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_d)$ を $P_\lambda$ の基底とする。$B$ は $(B-\lambda I)^k$ と交換可能であるから、$BP_\lambda \subset P_\lambda$。従って $d \times d$ の定数行列 $M_\lambda$ が存在して、$B\Phi_\lambda = \Phi_\lambda M_\lambda$ を満たす。$B\Phi_\lambda = \frac{d\Phi}{d\theta}$ であるから、$\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{M_\lambda \theta}$, $-r \leqq \theta \leqq 0$ と書ける。又

$\frac{d}{dt}(T(t)\Phi_\lambda) = BT(t)\Phi_\lambda = T(t)\Phi_\lambda M_\lambda$ より

$$T(t)\Phi_\lambda = \Phi_\lambda(\theta)e^{M_\lambda t} = \Phi_\lambda(0)e^{M_\lambda(t+\theta)}$$

と書ける。この事より $T(t)$ は $P_\lambda$ 上では群とみなす事が出来る

## §3 形式的共役方程式一分解定理

方程式 $\dot{v} = Av + a v(t+r, x)$ を $\dot{u} = -Au - a u(t-r, x)$ の形式的共役方程式と呼ぶ。$C^* = C([0, r]; L^2(\Omega))$ と同様の推論を.

$$(3.1) \quad \begin{cases} \dot{v} = -\Delta v + a v(t+r, x) & \text{in } (-\infty, 0) \times \Omega \\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 & \\ v(\xi) = \psi(\xi) & 0 \leqq \xi \leqq r \end{cases}$$

に行えば、$\psi$ に対して解 $v^t(\xi,x)$ $(=v(t+\xi,x),\ 0\leq\xi\leq r$, の意味$)$ を対応させる写像 $T^*(t)$ : $T^*(t)\psi = v^t(0,\psi,0)$ は $C^*$ で強連続半群 $\{T^*(t)\}_{-\infty<t\leq 0}$ をなし、その生成作用素を $B^*$ とするとき、$B^*\psi = -\frac{d\psi}{d\xi}$, $0\leq\xi\leq r$, $B^*\psi(0) = A\psi(0) - a\psi(r)$ を示す事ができ $D(B^*)=\{\psi\in C^*;\ \dot{\psi}\in C^*,\ \psi(0)\in D(A),\ \dot{\psi}(0)=-A\psi(0)+a\,\psi(r)\}$ が分る。更に $(\cdot,\cdot)$ を $L^2(\Omega)$ の内積とし、$\psi\in C^*$, $\varphi\in C$ に対して

$$\langle\langle\psi,\varphi\rangle\rangle = (\psi(0),\varphi(0)) - a\int_{-r}^{0}(\psi(\xi+r),\varphi(\xi))\,d\xi$$

と定義すると、$\langle\langle\psi,B\varphi\rangle\rangle = \langle\langle B^*\psi,\varphi\rangle\rangle$, $\psi\in D(B^*)$, $\varphi\in D(B)$ を満す

<u>命題3.1</u>　i) $\lambda\in\sigma(B)\Leftrightarrow\lambda\in\sigma(B^*)$

ii) ${}^\forall g\in C$ に対し $(B-\lambda I)^k\varphi=g$ が $C$ に解をもつ必要十分条件はすべての $\psi\in N(B^*-\lambda I)^k$ に対して $\langle\langle\psi,g\rangle\rangle=0$。

iii) $\Phi_\lambda=(\varphi_1\cdots\varphi_d)$ を $P_\lambda$ の基底で $\Psi_\lambda={}^t(\psi_1,\cdots,\psi_d)$ を $P_\lambda^*$ の基底とする。但し ${}^t(\cdots)$ は転置を表わす。この時、行列 $\langle\langle\Psi_\lambda,\Phi_\lambda\rangle\rangle=\{\langle\langle\psi_i,\varphi_j\rangle\rangle\}$ は non-singular である。故に適当な基底の変換で、$\langle\langle\Psi_\lambda,\Phi_\lambda\rangle\rangle=I$。

iv) ${}^\forall\varphi\in C$ 毎 $\varphi^P=\Phi_\lambda\langle\langle\Psi_\lambda,\varphi\rangle\rangle$, $\varphi^Q=\varphi-\varphi^P$ とおいて、$C$ を直和分解 $C=P_\lambda\oplus Q_\lambda$ できる。

<u>注意</u>　行列 $M_\lambda$ の定義と同様に行列 $M_\lambda^*$ が $B_\lambda^*\Psi_\lambda=M_\lambda^*\Psi_\lambda$ と定義される。特に $\langle\langle\Psi_\lambda,\Phi_\lambda\rangle\rangle=I$ の時 $M_\lambda^*=M_\lambda$ である事を注意しておく。

定理3.1　$\varphi, f, u$ は定理1.1と同じとする。このとき、

$$u_t^P = T(t-\sigma)\varphi^P + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^P f(s,\cdot)\,ds,$$

$$u_t^Q = T(t-\sigma)\varphi^Q + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^Q f(s,\cdot)\,ds$$

と書ける。但し $X_0^P f = \Phi_\lambda(\Psi_\lambda(0), f(s,\cdot))$, $X_0^Q f = X_0 f - X_0^P f$。

## §4　周期解の存在規準一交代定理

$\Lambda_0 = \{\lambda\in\sigma(B);\ \mathrm{Re}\,\lambda = 0\}$　$\Lambda_1 = \{\lambda\in\sigma(B);\ \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$ と置き、$\Lambda_0$ $\Lambda_1$ でもって $C$ を $C = P_0\oplus P_1\oplus Q$ と分解する。$\mathcal{P}_\omega = \mathcal{P}_\omega(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ を周期 $\omega$ をもつ $L^2$ 値連続周期関数の空間, $U(t)$ を $\dot{u} = -Au - au(t-r;x)$ の $\omega$ 周期解の基底, $V(t) = {}^t(\psi_1,\psi_2)$ を形式的共役方程式 $\dot{v} = Av + av(t+r,x)$ の $\omega$ 周期解の基底とする。このとき $\mathcal{P}_\omega$ から $\mathcal{P}_\omega$ への射影 $\pi, J$ を次の様に定義する。$g\in\mathcal{P}_\omega$ に対し

$$\pi g = U(t)\left[\int_0^\omega ({}^tU(s), U(s))\,ds\right]^{-1}\int_0^\omega ({}^tU(s), g(s))\,ds$$

$$Jg = {}^tV(t)\left[\int_0^\omega (V(s), {}^tV(s))\,ds\right]^{-1}\int_0^\omega (V(s), g(s))\,ds\ .$$

ただし ${}^tU$ は $U$ の転置行列, $({}^tU(s), U(s)) = \int_\Omega {}^tU(s,x)\cdot U(s,x)\,dx$ を表す。

定理4.1　$\forall\sigma\in\mathbb{R}$, $\forall f\in\mathcal{P}_\omega$ に対して

$$(4.1)\quad u(t,x) = e^{-(t-\sigma)A}u(\sigma,\cdot) - a\int_\sigma^t e^{-(t-s)A}u_s(-r,\cdot)\,ds + \int_\sigma^t e^{-(t-s)A}f(s,\cdot)\,ds$$

が $\mathcal{P}_\omega$ の中に解をもつ必要十分条件は $Jf = 0$。更に $(I-J)\mathcal{P}_\omega$ から $(I-\pi)\mathcal{P}_\omega$ への線型連続写像 $K$ で、任意の $f\in(I-J)\mathcal{P}_\omega$ に対して、$Kf$ が (4.1) の解となるものが存在する。

<u>証明の方針</u>　方程式(4.1)を定理3.1に従って

(4.2)　$$u_t^{P_0} = T(t-\sigma)u_\sigma^{P_0}(0) + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^{P_0} f(s)\,ds$$

(4.3)　$$u_t^{P_1} = T(t-\sigma)u_\sigma^{P_1}(0) + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^{P_1} f(s)\,ds$$

(4.4)　$$u_t^{Q} = T(t-\sigma)u_\sigma^{Q}(0) + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^{Q} f(s)\,ds$$

と分解する。(4.3),(4.4)の解は$T(t)$が$P$上では群になる(§2を参照)事等を使って

$u_t^{P_1} = \int_\infty^t T(t-s)X_0^{P_1} f(s)\,ds$,　$u_t^{Q} = \int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^{Q} f(s)\,ds$ と解ける。(4.2)に関しては、命題3.1のiv)によって $u_t^{P_0} = \Phi_0 z(t)$, $z(t) = \langle\langle \Psi_0, u_t \rangle\rangle$ と書ける。但し$\Phi_0$は$P_0$の基底で$\Psi_0$は共役な基底で$\langle\langle \Psi_0, \Phi_0 \rangle\rangle = I$なるもの。この事を注意して、(4.2)の左から$\Psi_0$をほどこすと、(4.2)は常微分方程式

(4.5)　$$\dot{z}(t) = M_0 z(t) + (\Psi_0(0), f(t))$$

に帰着される。ただし行列$M_0$は$B\Phi_0 = \Phi_0 M_0$で定義されるもの。この(4.5)に常微分方程式の理論を適用すればよい。(cf. J. Hale [1])。後半は$f \in (I-J)\mathcal{P}_\omega$なら$Jf = 0$であるから、$\omega$周期解$u(f)$が存在する。このとき$\mathcal{K}f = (I-\pi)u(f)$と定義すると定理の主張がすべて満たされる事が分る。

## §5. 零解の安定性

次の節で(0.4)に対する零解が安定性を失った時、周期解が分枝する話を行う訳であるが、その前にここでは、特性根

の実部がすべて負ならば、初期データーが小さい時零解は漸近安定である事を言う。実際、§7で分るが、$ra < \frac{\pi}{2}$ のとき、特性根の実部はすべて負である。

命題 5.1　$u$ を初期データー $u(\theta,x) = \varphi(\theta,x)$, $-r \leqq \theta \leqq 0$ に対する (0.4) の解とする。$\rho(t) = \sup_{-r\leqq s\leqq t} (1+s^2)^{1/4} \|u(s,\cdot)\|_1$ とおくとき、$t, u, \varphi$ に依存しない定数 $c$ が存在して

$$\rho(t) \leqq c\,(\,\rho(0) + \rho^3(t)\,)$$

が成立する。

この命題を使って次の定理をうる。

定理 5.1　$c$ は命題 5.1 の定数とする。このとき、

$$c^2 \rho^3(0) < 4/27$$

ならば、$t, u, \varphi$ に依存しない定数 $K$ が存在して

$$(\,1+t^2)^{1/4} \|u(t,\cdot)\|_1 \leqq K \quad , t > -r$$

をみたす。

## §6　Hopf 分枝定理

(0.4) に対する Hopf 分枝定理を考察する。まず $t_1 = rt$, $u_1(t_1, x) = u(rt, x)$ と変換すると (0.4) は次の様にかける。

ただし以下添字の1は省略する。

$$(6.1)\quad \begin{cases} \dot{u} = r\Delta u - ra\,u(t-1,x) + rb\,u^3(t-1,x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

この時、(6.1)に対する特性方程式は

$$(6.2)\qquad \lambda + ra\,e^{-\lambda} + r\xi_j = 0 \quad , j = 0, 1 \cdots$$

と書ける。$\xi_j$は前と同じ様にAの固有値である。まず特性根に関する仮定を設ける。

(H.1) ある正数$r_0$が存在して、$r_0$の近傍$|r-r_0|<r'$で複素共役根$\{\lambda(r), \overline{\lambda(r)}\}$，$\lambda(r) = \mu(r) + i\nu(r)$，で各$\lambda$，$\bar{\lambda}$は単根であるものが存在し，$\lambda(r_0) = i\nu_0$，$\nu_0 > 0$ を満たす。

(H.2) $\mathrm{Re}\,\lambda'(r_0) \neq 0$，　$\lambda' = \frac{d\lambda}{dr}$ を表わす。

$P_\omega^{1,2} = \{ u \in P_\omega(R; H^1_N) \,;\, \dot{u} \in P_\omega(R; L^2(\Omega)) \}$ と置く事にする。

<u>定理 6.1</u>　上記の仮定の下にある$\varepsilon_0>0$が存在し，$|\varepsilon|<\varepsilon_0$上で正の連続関数$r(\varepsilon)$，$\omega(\varepsilon)$と$u^*(\varepsilon) \in P^{1,2}_{\omega(\varepsilon)}$が存在して，$r(0) = r_0$　$\omega(0) = \omega_0 (= 2\pi/\nu_0)$ 及び $u^*(\varepsilon)$は(6.1)の解。

<u>証明の方針</u>　$P_r$を$\{\lambda(r), \overline{\lambda(r)}\}$に対する固有空間とすると、2次元である。$\lambda(r)$は(6.2)の根であるからある$\xi$が存在して、$\lambda(r) + ra\,e^{-\lambda(r)} + r\xi = 0$ を満たす。今$\alpha(x)$を$\xi$に対す

るAの固有関数とし，$\int_\Omega \alpha^2(x)\,dx = 1$ と正規化しておく。$M(r) = [m_{ij}(r)]$，$m_{11} = m_{22} = \mu(r)$，$m_{12} = -m_{21} = \nu(r)$，なる $\lambda(r)$ から作られる $2\times 2$ 行列とする。この時 $P_r$ の基底 $\Phi_r(\theta, x)$ は $\Phi_r = \alpha(x)e^{M(r)\theta}$ と書ける。(6.1) に対して次の様な変数変換 $t = (1+\beta)\tau$，$\beta > -1$，$v(\tau, x) = u((1+\beta)\tau, x)$ を行うと、(6.1) は

(6.2) $\dot{v} = (1+\beta)r\Delta v - (1+\beta)ra\, v_{\tau,\beta}(-1) + (1+\beta)rb\, v^3_{\tau,\beta}(-1)$

と書ける。但し $v_{\tau,\beta}(-\theta, x) = v(\tau + \theta/(1+\beta), x)$，$-1 \leqq \theta \leqq 0$ を意味する。(6.2) の $\omega_0$ 周期解を見つける事と、(6.1) の $(1+\beta)\omega_0$ - 周期解をみつける事は同値で、以下 (6.2) の $\omega_0$ 周期解をみつける問題を考える。(6.2) を

(6.3) $\dot{v} = r_0\Delta v - r_0 a\, v_\tau(-1) + N(r, \beta, v)$

$N(r, \beta, v) = (1+\beta)r\Delta v - r_0\Delta v + r_0 a\, v_\tau - (1+\beta)a\, v_{\tau,\beta} + (1+\beta)rb\, v^3_{\tau,\beta}$

と書く。さて $U(\tau, x) = \Phi_r(\tau, x)$ とおくと $U(\tau, x)$ は $\dot{v} = r_0\Delta v - r_0 a v_\tau(-1)$ の $\omega_0$ 周期解である。$e = \binom{1}{0}$ と置く。このとき 定理 4.1 より

(6.4) $v = \varepsilon U(\tau, x)e + \mathcal{K}(I - J)N(r, \beta, v)$

(6.5) $JN(r, \beta, v) = 0$

である様な $v \in P^{1,2}_{\omega_0}$ をみつければ、それが求める $v$ である。

(6.4) を考えよう。$K(\varepsilon, r, \beta, v) = v - \varepsilon Ue - \mathcal{K}(I-J)N(r, \beta, v)$ と置いてこれを、$R \times \{r ; |r - r_0| < r'\} \times (-1, \infty) \times P^{1,2}_{\omega_0}$ から $P_{\omega_0}$ への写像と考える。$K(0, r_0, 0, 0) = 0$，$(\partial K/\partial v)(0, r_0, 0, 0) = I$ より陰関数定理を使って、$(\varepsilon, r, \beta) = (0, r_0, 0)$ の近傍で一意的に $v^*(\varepsilon, r, \beta)$ が

$P^{2,1}_{\omega_0}$ の中に存在する。次にこの $v^*$ に対し (6.5) $JN(r,\beta,v^*(\varepsilon,r,\beta))=0$ が成立する様な $r,\beta$ をさがす。$JN(r,\beta,v^*(0,r,\beta))=0$ であるので $JN(r,\beta,v^*(\varepsilon,r,\beta))=0$ を考える代りに $\frac{1}{\varepsilon}JN(r,\beta,v^*(\varepsilon,r,\beta))=0$ を考える。これを今 $H(\varepsilon,r,\beta)$ とおき，$H(\varepsilon,r,\beta)=0$ を陰関数定理を用いて $r,\beta$ について解く。まず，$H$ の $r,\beta$ に関する Jacobian をとると，

$$\frac{\partial H(0,r_0,0)}{\partial(r,\beta)} = (\omega_0/2)\begin{bmatrix} 2\mu'(r_0) & -\varepsilon_1\nu_0 \\ -2\nu'(r_0) & -(4-\varepsilon_2)\nu_0 \end{bmatrix}$$

を得る。但し $\varepsilon_1 = 2\nu_0/\{\nu_0^2+(1-r_0 a\cos\nu_0)^2\}$, $\varepsilon_2 = 2(1-r_0 a\cos\nu_0)/\{\nu_0^2+(1-r_0 a\cos\nu_0)^2\}$ である。更に

$$\det\begin{bmatrix} 2\mu'(r_0) & -\varepsilon_1\nu_0 \\ -2\nu'(r_0) & -(4-\varepsilon_2)\nu_0 \end{bmatrix} = 4\mu'(r_0)\nu_0/\{\nu_0^2+(1-r_0 a\cos\nu_0)^2\}$$

となる事が示され，この右辺は仮定 (H.1) (H.2) より零でない。一方 $H(0,r_0,0)=0$ であるから、ある $\varepsilon_0>0$ が存在して，$|\varepsilon|<\varepsilon_0$ で $r(\varepsilon)>0$，$\beta(\varepsilon)>-1$，かつ $r(0)=r_0$，$\beta(0)=0$ なる連続関数 $r(\varepsilon)$ $\beta(\varepsilon)$ が存在し，$\omega(\varepsilon)=1+\beta(\varepsilon)$，$u^*(\varepsilon)(t,x)=v^*(\varepsilon)(\omega(\varepsilon)^{-1}t,x)$ とおく事によって、$u^*(\varepsilon)$, $\omega(\varepsilon)$ が存在する事が分る。

## §7 周期解の分枝

(0.4) の周期解の存在を言うには，前節の定理 6.1 の仮定 (H.1)，(H.2) を満足する $r_0$ と特性根 $\{\lambda(r),\overline{\lambda(r)}\}$ をさがせばよ

い。まず次の Hayes の補題（[2] を参照）を述べる。

補題7.1　$\alpha$、$\beta$ を実数とする。このとき、$(\lambda+\beta)e^{\lambda}+\alpha=0$ の根の実部がすべて負である為の必要十分条件は

(7.1) $\beta > -1$

(7.2) $\alpha+\beta > 0$

(7.3) $\alpha < \zeta\sin\zeta - \beta\cos\zeta$

を満たす事である。但し $\zeta$ は $0<\zeta<\pi$ で，$\beta=0$ の時は $\zeta=\pi/2$ であり，$\beta\neq 0$ の時は $\zeta=-\beta\tan\zeta$ の根である。更に

$$G(\beta)=\zeta(\beta)\sin\zeta(\beta)-\beta\cos\zeta(\beta)$$

とおくと，$0<\beta<\infty$ のとき $\pi/2<G(\beta)$ であり，$\beta\to\infty$ のとき $G(\beta)\to\infty$ である。

この補題をもとにして $j=0$ に対する特性方程式

$$\lambda + ra\,e^{-\lambda} = 0$$

を考察すると、$ra=\pi/2$ の近傍で次の様な根が存在する事が分る。$\lambda(r)=\mu(r)+i\nu(r)$ は $r$ に関して可微分であり，$\nu(\pi/2a)=\pi/2$，$\mu(\pi/2a)=0$，かつ $\mu'(\pi/2a)>0$ で $r>\pi/2a$ に対して $\mu(r)>0$。更に残りの複素共役根をのぞく，特性根は、その実部がすべて負である。再び補題7.1 を $\lambda+ra\,e^{-\lambda}+r\xi_j=0$，$j=1,2,\cdots$ に適用すると $ra=\pi/2$ の近傍

では、これらの方程式の根の実部はすべて負となる。従って定理6.1より

<u>定理7.1</u> 方程式(0.4)は $ra=\pi/2$ で第0モードの周期解が最初の分枝解として現われる。

## 参考文献


[1] J. Hale, Ordinary differential equations, Wiley-Interscience, 1969.

[2] J. Hale, Theory of functional differential equations, Springer, 1977.

[3] A. Inoue, T. Miyakawa and K. Yoshida, Some properties of solutions for semilinear heat equations with time lag, J. Differential Equations 24 (1977), 383-396.

[4] J. Lin and P. B. Kahn, Turbulance in delay-diffusion population model, preprint.

[5] J. D. Murray, Spatial structurs in predator-prey communities - a nonlinear time delay diffusional model, Math. Biosci., 30 (1976), 73-85.

[6] D. Stirzaker, On a population model, Math. Biosci. 23 (1975), 329-336.

[7] K. Yosida, Functional analysis, Springer, 1966.