数理解析研究所講究録
第421巻 1981年 262-267

ユネート関数におけるプライムインプリカントの最大数

相模工大　岩田茂樹

1. 序

ブール関数の簡略化において、プライムインプリカントは重要な概念である。ほとんどすべての最小化アルゴリズムはすべてのプライムインプリカントをつくり出して、最小形をみつける。もし、任意のブール関数についてプライムインプリカントの最大数がわかれば、最小化プロシージャをコンピュータで実行する際、プライムインプリカントの作業域の大きさを知ることができる. と同時に、使用可能なメモリ領域の大きさから最小化できるブール関数の変数の最大数を知ることも可能となる.

しかしブール関数のプライムインプリカントの最大数は求まっていない. 知られている下界のうちで最もよいものはIgarashi [5] によるものであり, 次式で与えられる.

$$\binom{n}{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor\ \lfloor\frac{n+1}{3}\rfloor\ \lfloor\frac{n+2}{3}\rfloor} + h(n, \lfloor\tfrac{n+1}{3}\rfloor - 2) + h(n, \lfloor\tfrac{n+2}{3}\rfloor - 2)$$

ただし，

$$h(n, r) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ 1 & r = 0 \\ \binom{n}{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor\ \ n-r\ \ \lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor} + h(n, \lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor - 2) & 1 \leqq r \leqq n \end{cases}$$

この下界は，$\Omega(\frac{3^n}{n})$ である．一方，上界のうちで最もよいものは，Chandra and Markowsky [1] によるもので，

$$\binom{n}{\lfloor\frac{2n+1}{3}\rfloor} 2^{\lfloor\frac{2n+1}{3}\rfloor}$$

であり，$O(\frac{3^n}{\sqrt{n}})$ である．

本報告は，ブール関数を制限し，その制限されたクラスのブール関数について，プライムインプリカントの最大値を与える．

2．ユネート関数

リテラルとは変数または変数の否定である．連言とは，リテラル $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_k$ の結合 $\ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \cdots \cdot \ell_k$（$k \geqq 0$）のことで，$k = 0$ のときは true をあらわす．ブール関数が，$\bigvee_{i=1}^{\ell} t_i$ の形であらわされているならば，論理和標準形であるという．ただし，$t_1, t_2, \cdots, t_\ell$ は連言で，$\ell = 0$ のと

きは false をあらわす．連言 t とブール関数 f について，$t \Rightarrow f$ ならば，t は f のインプリカントであるという．ただし，$\Rightarrow$ は"ならば"をあらわす．インプリカント t のリテラルの集合のどの真部分集合により構成されるインプリカント t' についても，$t' \not\Rightarrow f$ であるとき，t はプライムインプリカントであるという．

定義［7］ ブール関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ は，f の論理和標準形の表現が存在して，その表現中 f のすべての変数 x_i について，x_i は否定でない形と否定の形の両方のリテラルを含むことがないならば，ユネート関数であるという． □

定理1［4］ ユネート関数は，次を満足する論理和標準形の表現がただ1つだけ存在する．

(1) 連言が他の連言を含まない．

(2) すべての変数について，否定でない形と否定の形の両方のリテラルを含むことはない． □

3．ユネート関数のプライムインプリカント

n 変数のユネート関数で，$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 個のリテラルからなるすべての連言の論理和によって構成される関数を考える．その関数での異なる連言の数は $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ であることに注意する．

定理1より次をうる．

系 上で定義されたユネート関数のすべての連言はその関

数のプライムインプリカントである． □

系により，上に定義したn変数のユネート関数は，$\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$個のプライムインプリカントをもつ．これは$n$変数ユネート関数のプライムインプリカントの最大数の下界である．次にこの下界が上界になっていることを示す．

定理2．n変数ユネート関数のプライムインプリカントの数は$\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$をこえない． □

証明．$f(x_1,\cdots,x_n)$をユネート関数とする．定義により，fの論理和標準形の表現が存在して，すべての変数について否定でない形と否定の形の両方のリテラルが含まれることはない．すべての$i(1\leqq i\leqq n)$について変数x_iが否定の形のリテラルを含むなら$e_i=0$，また否定でない形のリテラルを含むなら$e_i=1$とする．

Cを，リテラル$x_1^{e_1}, x_2^{e_2}, \cdots, x_n^{e_n}$からなるすべての連言の集合とする．ただし，$x_i^0=\overline{x_i}$，$x_i^1=x_i$．また，$\leqq$を$C$上の関係で，$c_1\leqq c_2 \Leftrightarrow c_2$のリテラルの集合は$c_1$のリテラルの集合の部分集合，とする．$(C,\leqq)$は半順序集合となることに注意する．$PI(f)$を$f$のプライムインプリカントの集合とすると，$PI(f)$は$C$のantichainである：すなわち任意の$c_1,c_2\in PI(f)$，$PI(f)\subseteq C$に対して$c_1\leqq c_2$でもなく、また$c_2\leqq c_1$でもない．したがって$PI(f)$の要素の数は$C$の

antichain の最大サイズをこえることはない．最大サイズのCの antichain は，ある k に対して，k個のリテラルよりなるすべての連言の集合であることが知られている［6］．k個のリテラルよりなるすべての連言の数は $\binom{n}{k}$ であり，この数は $k=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ のとき最大となる，よって antichain の最大サイズは $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ をこえない．ゆえにユネート関数のプライムインプリカントの最大数は $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ をこえない． □

スターリングの公式により，十分大きな n に対し，$\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=c\cdot\frac{2^n}{\sqrt{n}}$ となる．ただし c は定数．n 変数のユネート関数の数は $\Omega(2^{\frac{2^n}{\sqrt{n}}})$ であることがわかっている［3］．n変数のブール関数の数は 2^{2^n} であるから，"ほとんど" のブール関数については、プライムインプリカントの数は $O(\frac{2^n}{\sqrt{n}})$ をこえないことがわかる．

〈文献〉

[1] Chandra, A.K., and Markowsky, G., On the number of prime implicants, Discrete Math. (1978) 7-11.

[2] Dunham, B. and Fridshal, R., The problem of symplifying logical expressions, J. Symbolic Logic 24 (1959) 17-19.

[3] Gilbert, E.N., Lattice theoretic properties of frontal switching functions, J. Math. Phys. 33 (1954) 57-67.

[4] Harrison, M.A., Introduction to Switching and Automata Theory, McGraw-Hill, New York, 1965.

[5] Igarashi, Y., An improved lower bound on the maximum number of prime implicants, IECE-E 62 (1979), 389-394.

[6] Kleitman, D.J., Edelberg, M., and Lubell, D., Maximal sized antichains in partial orders, Discrete Math. (1971) 47-53.

[7] Miller, R.E., Switching Theory, Vol. I, John Wiley, New York, 1965.