数理解析研究所講究録
第 424 巻 1981 年 99-105

有限群の subclass algebra について

阪市大 理　奥山 哲郎

有限群のモジュラー表現の研究は、大きく、指標理論的、加群論的，群環論的考察に分けられる。ここでは、群環論的考察において興味深いと思われる部分群による subclass algebra などについての性質をいくつか調べてみたい。

以下．pを素数，kを標数pの代数的閉体，Gを有限群とする。kG で群環を表す．kG は次の様にして．$kG\times G$-加群（加群は、右加群をいうものとする）；

$kG \ni \alpha$, $G\times G \ni (x,y)$, $\alpha(x,y) = x^{-1}\alpha y$ 。

§1．

Gの部分群Hに対し．$k(G;H) = C_{kG}(H)$ とおく（GのHによる subclass algebra ）。$k(G;H)$ は．k上．GのH-共役和で張られている。この節では．$k(G;H)$の性質を調べてみたい。

(1.1). $k(G;H)$の元をkGに左からかけることによってkGの$kH\times G$-準同型がえられるが、これは、同型；

$$k(G;H) \simeq \mathrm{End}_{H\times G}(kG)$$

を与える。また、$H^{\Delta}=\{(h,h) ; h\in H\}\subseteq H\times G$ とおくとき

$$L_0(H^{\Delta})^{H\times G} \simeq kG \quad (L_0(H^{\Delta})\text{は、trivial } kH^{\Delta}\text{-加群})$$

(1.2). $\tau ; kH\times G \longrightarrow kG$, $\tau((h,g))=h^{-1}g$ とする。

(1). τは、$H\times G$-準同型で全型である。

(2). eをGのblock idempotent, Dをそのdefect groupとする。$D^{x}\cap H=1$ for $\forall x\in G$ ならば、kGeはprojective $kH\times G$-加群で、τと、$kG\to kGe$ (projection) の合成は、split-epiである。

興味深いのは（取り扱いやすいのは）、Hがp'-部分群，p-部分群のときであるように思われる。以下、この節では、<u>Hをp'部分群と仮定</u>して議論していく。

(1.3). $k(G;H)$はsymmetric k-algebraである。

証明は、kGがsymmetric k-algebraであることのよく知られた証明が適用できることより得られる。

環 A に対し、$J(A)$, $S(A)$ で、それぞれ Jacobson radical, Socle を表すことにする。

kG と $k(G;H)$ について次の関係が成立する。

(1.4). $J(k(G;H)) = J(kG) \cap k(G;H)$

$S(k(G;H)) = S(kG) \cap k(G;H)$.

証明. H が p'-部分群であるから、(1.1) より、kG は、projective $kH \times G$-加群である。また、$J(kG)$ は、$kH \times G$-加群としての kG の radical である。このとき、(1.1) の前半の同型を調べると、(1.4) が導かれる。

$S(kG)$ は kG の中心のある元で生成される（中山）ことに注意して次を得る。

(1.5). $S(k(G;H))kG = S(kG) = kG(S(k(G;H)))$.

H が p'部分群であることより、Fossum [ ]、あるいは、Green [ ] の議論を適用して、$kH \times G$-加群と、$k(G;H)$-加群の間につぎの様な対応が存在する。

(1.6).

(1). $S(k(G;H)) \supseteq L$ を irreducible $k(G;H)$-加群とすると、LkG は、irreducible $kH \times G$-加群となる。

(2). $S(kG) \supseteq M$ を irreducible $kH \times G$-加群とすると

$M \cap k(G;H)$ は，irreducible $k(G;H)$-加群，または，0-加群となる。

(3). 上の対応で {Irreducible $k(G;H)$-加群} と {Irreducible $kH\times G$-加群，M で $\mathrm{Inv}_{H\Delta}(M) \neq 0$ なるもの} との 1対1 の対応ができる。

(1.6)と関連して，次の問題が，古くからある Brauer の予想として生じてくる。

(1.7) 一問題一 $D \in Syl_p(C_G(H))$, $D \leq P \in Syl_p(G)$ とする。L を (1.6). (1) の irreducible $k(G;H)$-加群とするとき，$(\dim_K L)_p \, |P:D| \geq (\dim_K L kG)_p$
が成立するか？。

(1.8)．(1.7)は，Brauerの次の予想と同値な内容である。(R, K, k) を p-modular system とする。φ を irreducible Brauer character，$G \ni x$ を p'-element とするとき，

$$|G : C_G(x)| \, \varphi(x) / \varphi(1) \in R$$

が成立するか？。

(1.7)と関連して，次の事柄が成立している。

(1.9) D, P を (1.7) のとおりとする。このとき

$k(G;H) \supseteq kD$ で，$k(G;H)$ は 右，左，自由 kD-加群となる。特に．　$\dim_k k(G;H) \equiv 0 \pmod{|D|}$

したがって　$(\dim_k k(G;H))_p\,|P:D| \geqq (\dim_k kG)_p$.

§2.

有限群のモジュラー表現の理論において．p-部分群の中心化群との関係を調べるのに．Brauer による．Brauer homomorphism は．大事な道具である。最近．Alperin，Broué，Puig などによって．それが拡張された形で議論がなされ．さらに有効な手段として役立っている。p-部分群の正規化群に関しても．Brauer homomorphism と類似な homomorphism があることを．以下で示す。応用があるわけではないので．単に参考として記すのみにする。

以下．P を G の p-部分群とし，$\hat{P} = \sum_{x \in P} x \in kG$ とおく

$C_{kG}(\hat{P}) \supset A = \{\alpha \in C_{kG}(\hat{P}),\ \alpha\hat{P} = 0\}$　とし．

$k(G:\hat{P})^{\circ} = C_{kG}(\hat{P})/A$　とおく。

(2.1).　$\sigma : C_{kG}(\hat{P}) \longrightarrow kN_G(P)$　を．次の様に定義する。；$C_{kG}(\hat{P}) \ni \alpha = \sum_{g \in G} a_g g \longmapsto \sum_{g \in N_G(P)} a_g g$.

このとき，σは，次の k-algebra epi を誘導する。

$$k(G:\hat{P})^{\circ} \longrightarrow kN_G(P)/J(kP)kN_G(P)$$

(2.2)． $k(G;\hat{P})^{\circ} \simeq \mathrm{End}_{kG}(\hat{P}kG)$

$$kN_G(P)/J(kP)kN_G(P) \simeq \mathrm{End}_{kN_G(P)}(\hat{P}kN_G(P))$$

証明．(2.2)． $C_{kG}(\hat{P})$ の元を左から $\hat{P}kG$ にかけることによって，$\hat{P}kG$ の kG-準同型が得られる。そのとき，A は 0-写像となるものである。また，計算によって，$k(G:\hat{P})^{\circ}$ の次元は，(P,P)-両側分解したときの cosets の個数であることがわかる。このことから，(2.2)の同型が得られる。

(2.1)．直接計算して確かめることもできるが，(2.2)を使って証明することもできる。$\hat{P}kN_G(P)$ は，trivial source をもつ加群の直和であるから，$P \supsetneq Q$ なる Q に対し，kQ-準同型 $f:\hat{P}kN_G(P) \to \hat{P}kN_G(P)$ について，$T_Q^{N_G(P)}(f)$ は 0-写像となる。この事実と，$\hat{P}kG$ と $\hat{P}kN_G(P)$ が Green Correspondant であることから(2.1)が導かれる。

(2.3)． Brauer homomorphism $;k(G:P) \longrightarrow kC_G(P)$ は，(2.1)の特別な場合となっている。

証明．(2.1)のGとして．$P\times G$，Pとして$P^{\Delta}=\{(x,x)\,;\,x\in P\}$をとる。このとき．$\widehat{P^{\Delta}}kP\times G\cong L_0(P^{\Delta})^{P\times G}$
$N_{P\times G}(P^{\Delta})=P^{\Delta}(1\times C_G(P))$となる。したがって．自然な同型
$k(G:P)\simeq \mathrm{End}_{kP\times G}(\widehat{P^{\Delta}}kP\times G)$，$kC_G(P)\simeq \mathrm{End}_{kN_{P\times G}(P^{\Delta})}(\widehat{P^{\Delta}}kN_{P\times G}(P^{\Delta}))$が得られる。(2.1)，(2.2)を適用して．証明が終わる。

参考文献

[1]. Alperin . Broué ; Local methods in block theory, Ann. Math. 110(1979), 143-157

[2]. Feit ; Representations of Finite Groups , Yale Univ. (1969)

[3]. Fossum ; Endmorphism rings of induced linear representations , Illinois J. Math. 16(1972). 143-153.

[4]. Green ; On a theorem of H. Sawada . J. London Math. Soc. (2) 18 (1978) 247-252