数理解析研究所講究録
第 424 巻 1981 年 125-128

不分岐主系列表現の既約性について

東大. 理. 加藤信一

p進体上の reductive群の不分岐主系列表現の理論は. Matsumoto (Springer Lecture Note #590) によって affine Weyl 群の Hecke環の表現 —— これも(不分岐)主系列表現とよぶ —— の理論に拡張された。ここでは. この表現の既約性について論じる。

1° <u>affine Weyl 群の Hecke環</u> 以下.

Δ = root系 $\supset \Delta^+$ = 正 root系 $\supset \Pi$ = 単純 root系,

W = Δ の Weyl 群

$T = \mathbb{Z}\Delta^\vee$ (coroot lattice : 但し $\alpha^\vee \in \Delta^\vee$ に対して $t_\alpha \in T$ と書くことにする。)

$\tilde{W}$ = Δ の affine Weyl 群

$\underset{\text{def}}{=} W \ltimes T$ (半直積)

とする。ここで $\alpha \in \Delta$ に対して対応する鏡映を $w_\alpha \in W$

と書くと、 $S=\{w_\alpha \mid \alpha\in\Pi\}$, $\tilde S = S\cup\{w_{\tilde\alpha}\cdot t_{\tilde\alpha}\}$ ($-\tilde\alpha$ は Δ の最大 root) とおくことによって $(\tilde W,\tilde S)$, (W,S) は共に Coxeter 系となる。 さて $q:\tilde S\to\mathbb{C}^\times$ を $q(s)=q(s')$ (if $s \overset{\tilde W\text{-共役}}{\sim} s'$) となるように定める。この時、この q に付随した $\tilde W$ の Hecke 環 $\mathcal{H}(\tilde W,q)$ が次のように定まる:

$\mathcal H(\tilde W,q)$ は基底 $\{\varepsilon_w\}_{w\in\tilde W}$ を持つ $\mathbb C$ 上の多元環で、 $w\in\tilde W$, $s\in\tilde S$ に対して積が

$$\varepsilon_s\cdot\varepsilon_w = \begin{cases} \varepsilon_{sw} & l(sw)>l(w) \\ q(s)\,\varepsilon_{sw}+(q(s)-1)\,\varepsilon_w & l(sw)<l(w) \end{cases}$$

によって与えられるもの (ε_e = 単位元)。 但し、 $l(\cdot)$ は $(\tilde W,\tilde S)$ の length function である。

$\mathcal H(\tilde W,q)$ は $\{\varepsilon_s\}_{s\in\tilde S}$ で生成されることを注意しておく。

2° <u>主系列表現</u>　　まず $\sqrt{q(s)}$ を各 $s\in S$ に対して選んでおく。 但し $q(s)=q(s')$ ならば $\sqrt{q(s)}=\sqrt{q(s')}$ となるものとする。 また $\alpha\in\Delta$ に対して

$$\sqrt{q_\alpha} \underset{\text{def}}{=} \sqrt{q(s)} \quad (\text{if } w_\alpha \overset{W\text{-共役}}{\sim} s\in S)$$

$$\sqrt{q'_\alpha} \underset{\text{def}}{=} \sqrt{q(s')} \quad (\text{if } w_\alpha t_\alpha \overset{\tilde W\text{-共役}}{\sim} s'\in\tilde S)$$

と定め、 $\delta^{1/2}\in \mathrm{Hom}(T,\mathbb C^\times)$ を $\delta^{1/2}(t_\alpha)=\sqrt{q_\alpha q'_\alpha}$

($=\sqrt{q_\alpha}\cdot\sqrt{q'_\alpha}$: $\alpha\in\Pi$) によって定義する。

$\lambda\in\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)$ に対して

$$M_\lambda \underset{\mathrm{def}}{=} \{ f : \tilde{W}\longrightarrow\mathbb{C} \mid f(wt)=(\lambda\delta^{1/2})(t)f(w) \quad (t\in T;\ w\in\tilde{W}) \}$$

とおく。さて、$\alpha_s\in\Delta$ ($s\in\tilde{S}$) を

$$\alpha_s = \begin{cases} \beta & (\text{if } s=w_\beta\in S : \beta\in\Pi) \\ \tilde{\alpha} & (\text{if } s\notin S) \end{cases}$$

として、ε_s の M_λ への作用を

$$(\pi(\varepsilon_s)f)(wt) = \begin{cases} f(swt)+(q(s)-1)f(wt) & (w^{-1}(\alpha_s)>0) \\ q(s)f(swt) & (w^{-1}(\alpha_s)<0) \end{cases}$$

$$(f\in M_\lambda;\ w\in W;\ t\in T)$$

で定めると、これは $\mathcal{H}(\tilde{W},q)$ の M_λ への作用に延長されることがわかる。この表現(もしくは M_λ)を主系列表現とよぶ。($\dim_{\mathbb{C}} M_\lambda=|W|<\infty$).

定理(Matsumoto) 任意の $\mathcal{H}(\tilde{W},q)$ の有限次既約表現は、$\exists\lambda\in\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)$ s.t. M_λ の部分表現となる。

§3 既約性　$\alpha\in\Delta$ に対して $\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)\simeq(\mathbb{C}^\times)^\ell$ ($\ell=\#\Pi$) 上の有理函数、c-函数を

$$c_\alpha(\lambda) \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{\left(1-\sqrt{q_\alpha q'_\alpha}^{\,-1}\lambda(t_\alpha)^{-1}\right)\left(1+\sqrt{q'_\alpha/q_\alpha}\,\lambda(t_\alpha)^{-1}\right)}{1-\lambda(t_\alpha)^{-2}}$$

$$(\lambda \in \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times))$$

で定義する。この表示は分母、分子が互いに素とは限らないから、約分した分母、分子をそれぞれ $d_\alpha(\lambda), e_\alpha(\lambda)$ とおく。(e.g. $q \equiv 1$ ならば $d_\alpha(\lambda) = e_\alpha(\lambda) \equiv 1$)。W は $\mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ に自然に作用するので、$\lambda \in \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ の固定化群を、W_λ と書くことにすると、

定理 (Matsumoto) $W_\lambda = \{e\}$ ならば

$$M_\lambda \text{ が既約} \iff e(\lambda) \underset{\mathrm{def}}{=} \prod_{\alpha \in \Delta} e_\alpha(\lambda) \neq 0 .$$

$W(\lambda) \underset{\mathrm{def}}{=} \langle w_\alpha \ (\alpha \in \Delta^+) \mid d_\alpha(\lambda) = 0 \rangle$ とおこう。直ちに $W_\lambda \triangleright W(\lambda)$ がわかるが、この時上の定理の一般化が次のようになされる。

定理 M_λ が既約 $\iff \begin{cases} \text{(i)} & e(\lambda) \neq 0 \\ \text{(ii)} & W_\lambda = W(\lambda) \end{cases}$ 。

(注) (i) 講演では Δ = 古典型 の場合について述べたが、その後一般的に証明された。(ii) 上の定理は p-adic reductive 群についても同様。