数理解析研究所講究録
第 426 巻 1981 年 15-29

Root系に付随した一次元多体問題
(量子力学系の場合)

広大 理学部　橋爪道彦

序　同一質量をもつn個の粒子が，一直線上を運動している量子力学系で，そのハミルトニアンが

(T) $$\mathbb{H} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} g_i^2 e^{2(x_i - x_{i+1})}$$

で与えられる系を（非周期的）戸田系，

(C) $$\mathbb{H} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2 + g\sum_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)^{-2}$$

で与えられる系をCalogero系と呼ぶ。ここに $x_1, x_2, \cdots, x_n$はn個の粒子の位置を表わし，$g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}$ 及び g は零でない実定数とする。なお粒子の質量及びPlank定数は1としてある。対応する古典力学系については その完全積分可能性及び運動の軌跡の具体的な記述はよく知られている(c.f.[6])。[5]においてKostantは(非周期的)古典戸田系の拡張を，実分解型半単純リー環の実分解型カルタン部分環に関するルート系に付随して与え，その系の完全積分可能性と運動のexactな記述を与えた。又Calogero古典系に関しては Olshanetsky－P

-erelomov([7])が，ルート系に付随した拡張を与え，その完全積分可能性を古典型ルート系の場合に示している。一方[1]においてCalogeroは(C)で与えられるハミルトニアンの固有値問題　$\mathbb{H}\psi = E\psi$　(E：エネルギー)　の　exactな解を構成し　その系の散乱状態を考察している。

ここでは　ルート系に付随した戸田及びCalogero量子系の拡張を，より広いclassのルート系に対して与える。更にBerger－大島の意味での半単純対称空間に付随したルート系に対応して得られる力学系を導入する。これらの拡張された系のハミルトニアンは，これを与えるルート系に対応する対称空間のラプラス－ベルトラミ作用素と密接な関係にあり，従って　その固有値問題の考察には　現在著しい発展を遂げつつある等質空間上の調和解析の理論が　重要な役割を果す。この立場から　我々は固有関数の具体的な決定を行う。

記号と定義　$(V,(\,,\,))$をℓ次元ユークリッド空間とする。

R：V内のルート系(簡単のため既約とする)，B：Rの基，

R_+：対応するRの正のルート系，W：RのWeyl群とする。

$\mathfrak{g}$：実半単純リー環，$B(x,y)$を$\mathfrak{g}$のKilling形式，

σ：$\mathfrak{g}$の包合的自己同型，θ：σと可換な$\mathfrak{g}$のカルタン包合，

$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$を夫々$\theta,\sigma$に関する固有空間分解

このとき　$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}\oplus\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ (直和)が成立つ。

$\mathfrak{a}_0$: $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の極大可換部分環, $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{p}$ の極大可換部分環

$\Sigma(\mathfrak{a})$: $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関するルート系, $\Sigma(\mathfrak{a}_0)$: $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}_0$ に関するルート系.

$\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a})$ に対し，そのルート空間 $\mathfrak{g}^\alpha$ の次元を m_α，同様に $\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a}_0)$ に対し そのルート空間を $\mathfrak{g}^\alpha$ と表わす。このとき m_α^+, m_α^- を

$$m_\alpha^+ = \dim\left(\mathfrak{g}^\alpha\cap(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}+\mathfrak{q}\cap\mathfrak{p})\right),\quad m_\alpha^- = \dim\left(\mathfrak{g}^\alpha\cap(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}+\mathfrak{q}\cap\mathfrak{k})\right)$$

で定義する。

ルート系に付随した量子力学系. 上の記号のもとに先ず戸田系及びCalogero系の拡張を与える。$V=\mathfrak{a}$ にとり，内積 $(\ ,\ )$ はKilling形式の $\mathfrak{a}$ への制限で定義する。ルート系 R として $\Sigma(\mathfrak{a})$ をとる。B を $R=\Sigma(\mathfrak{a})$ の基，R_+ を対応する正のルート系とする。$V=\mathfrak{a}$ のユークリッド計量 $(\ ,\ )$ に関するラプラス－ベルトラミ作用素を Δ で表わす。

定義 1. ルート系 $R=\Sigma(\mathfrak{a})$ に付随した戸田系とは ハミルトニアンが 次で与えられる $V=\mathfrak{a}$ 上の量子系とする.

$$\mathbb{H}_T = -\frac{1}{2}\Delta + \sum_{\alpha\in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha(x)}$$

ここに g_α $(\alpha\in B)$ は零でない実定数とする。

定義 2. ルート系 $R=\Sigma(\mathfrak{a})$ に付随したCalogero系とは，ハミルトニアン

$$\mathbb{H}_C = -\frac{1}{2}\Delta + \sum_{\alpha\in R_+} g_\alpha \alpha^{-2}(x)$$

をもつ $V=\mathfrak{a}$ 上の量子系である。ここに g_α $(\alpha\in R_+)$ は C を実定数として,

(1) $$g_\alpha = 2^{-1}(\alpha,\alpha)\{m_\alpha(m_\alpha+2m_{2\alpha})c^2 - m_\alpha c\}$$

で与えられる定数（但し，$2\alpha \notin R$ のとき $m_{2\alpha}=0$ とする）。

次に半単純対称空間のルート系 $\Sigma(\mathfrak{a}_0)$ に付随した量子力学系を与える。この場合 $V=\mathfrak{a}_0$；内積 $(\ ,\ )$ = Killing形式の $\mathfrak{a}_0$ への制限，$R=\Sigma(\mathfrak{a}_0)$ にとる。R の正のルート系を R_+ とし，Δ は $V=\mathfrak{a}_0$ の Laplace-Beltrami 作用素とする。

定義3. ルート系 $R=\Sigma(\mathfrak{a}_0)$ に付随した量子系とは ハミルトニアンが

$$\mathbb{H}_S = -\frac{1}{2}\Delta + \sum_{\alpha\in R_+}\left(\frac{g_\alpha^+}{\mathrm{sh}^2\alpha(x)} - \frac{g_\alpha^-}{\mathrm{ch}^2\alpha(x)}\right)$$

で与えられる $V=\mathfrak{a}_0$ 上の系とする。ここに g_α^+, g_α^- ($\alpha\in R_+$) は c を実定数として夫々

(2) $$\begin{cases} g_\alpha^+ = 2^{-1}(\alpha,\alpha)\{m_\alpha^+(m_\alpha^+ + 2m_{2\alpha}^+)c^2 - m_\alpha^+ c\} \\ g_\alpha^- = 2^{-1}(\alpha,\alpha)\{m_\alpha^-(m_\alpha^- + 2m_{2\alpha}^+)c^2 - m_\alpha^- c\} \end{cases}$$

で与えられる定数とする。但 $2\alpha\notin R$ のとき $m_{2\alpha}^{\pm}=0$ とおく。又 sh = sinh, ch = cosh と略記する。

(注意)1. $\mathbb{H}_T$ において，定数 g_α を各ルートに対して $g_{s\alpha}=g_\alpha$ ($s\in W$) となるように与えておけば $\mathbb{H}_T$ は基 B のとり方によらない。同様に $\mathbb{H}_C$, $\mathbb{H}_S$ における定数 g_α, $g_\alpha^\pm$ を与える式(1),(2)の右辺はWeyl群不変，従ってハミルトニアン $\mathbb{H}_C$, $\mathbb{H}_S$ はWeyl群不変であり正のルート系 R_+ のとり方にはよらない。

注意2 序で与えたハミルトニアン(T),(C)において重心座

標を分離して得られるハミルトニアンは　上で与えた $\mathbb{H}_T, \mathbb{H}_C$ で　A_{n-1} 型被約ルート系で各ルート α に対し $m_\alpha=1$ となる場合に得られるハミルトニアンに一致する。但し $g=c^2-c$ である。

以下 R が被約ルート系で　更に各 α に対し $m_\alpha=1$ となる場合に $\mathbb{H}_T, \mathbb{H}_C$ の具体的な表示を与える。(E型ルート系は省略).

$$
\begin{cases}
(B_l) & \mathbb{H}_T = -\frac{1}{2}\Delta + g_1 e^{2(x_1-x_2)} + \cdots + g_{l-1} e^{2(x_{l-1}-x_l)} + g_l e^{2x_l} \qquad (V=\mathbb{R}^l) \\
(C_l) & \mathbb{H}_T = -\frac{1}{2}\Delta + g_1 e^{2(x_1-x_2)} + \cdots + g_{l-1} e^{2(x_{l-1}-x_l)} + g_l e^{4x_l} \qquad (V=\mathbb{R}^l) \\
(D_l) & \mathbb{H}_T = -\frac{1}{2}\Delta + g_1 e^{2(x_1-x_2)} + \cdots + g_{l-1} e^{2(x_{l-1}-x_l)} + g_l e^{2(x_{l-1}+x_l)} \qquad (V=\mathbb{R}^l) \\
(G_2) & \mathbb{H}_T = -\frac{1}{2}\Delta + g_1 e^{2(x_1-x_2)} + g_2 e^{2(-2x_1+x_2+x_3)} \qquad (V=\{x\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_2+x_3=0\}) \\
(F_4) & \mathbb{H}_T = -\frac{1}{2}\Delta + g_1 e^{2(x_2-x_3)} + g_2 e^{2(x_3-x_4)} + g_3 e^{2x_4} + g_4 e^{(x_1-x_2-x_3-x_4)} \qquad (V=\mathbb{R}^4)
\end{cases}
$$

$$(B_l)=(C_l).\quad \mathbb{H}_C = -\frac{1}{2}\Delta + g\Big\{2^{-1}\sum_{1\le i\le l} x_i^{-2} + \sum_{1\le i<j\le l}\big((x_i-x_j)^{-2}+(x_i+x_j)^{-2}\big)\Big\}$$

$$(D_l)\qquad \mathbb{H}_C = -\frac{1}{2}\Delta + g\Big\{\sum_{1\le i<j\le l}\big((x_i-x_j)^{-2}+(x_i+x_j)^{-2}\big)\Big\}$$

$$(G_2)\qquad \mathbb{H}_C = -\frac{1}{2}\Delta + g\Big\{\sum_{1\le i<j\le 3}(x_i-x_j)^{-2} + 3\big((2x_1-x_2-x_3)^{-2}+(2x_2-x_3-x_1)^{-2}+(2x_3-x_1-x_2)^{-2}\big)\Big\}$$

(F_4)　省略.

尚　$\mathbb{H}_S$ の表示に現われる $m_\alpha^+, m_\alpha^-, m_{2\alpha}^+$ の具体的な値は各ルート系 $R=\Sigma(\sigma_0)$ に対し，関口氏によって計算されている。

固有値問題（戸田系の場合）

この節では　定義1で与えられたハミルトニアン $\mathbb{H}_T$ の固有値問題を考察する。最初に対応する古典力学系について簡単に触れておく。$\mathbb{H}_T$ に対応する古典系のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}(y,y) + \sum_{\alpha\in B} g_\alpha^2 e^{2(\alpha,x)}, \qquad (x,y)\in V\times V$$

で与えられる。但しVとその双対空間V^*とは内積$(\ ,\ )$により同一視しておく。対応するハミルトニの運動方程式は，

$$(*)\ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\sum_{\alpha\in B} g_\alpha^2 e^{2(\alpha,x)}\cdot\alpha \end{cases}$$

で与えられる。この運動方程式に対応するLax pairの一例を挙げておく。各$\alpha\in B$に対し$e_\alpha\in\mathfrak{g}^\alpha$を，$-B(e_\alpha,\theta e_\alpha)=1$を満たすようにとる。このとき$\theta e_\alpha\in\mathfrak{g}^{-\alpha}$，$[e_\alpha,\theta e_\alpha]=-\alpha$である。

$L\in\mathfrak{p}$，$M\in\mathfrak{k}$を

$$\begin{cases} L = y + \sum_{\alpha\in B} g_\alpha e^{(\alpha,x)}(e_\alpha-\theta e_\alpha) \\ M = \sum_{\alpha\in B} g_\alpha e^{(\alpha,x)}(e_\alpha+\theta e_\alpha) \end{cases}$$

とおく。このとき

$$\dot{L} = [L,M] \iff \text{Hamilton の運動方程式} (*)$$

が成立し，この系の運動の積分は$P(L)$（$P\in S(\mathfrak{p})^K=\mathfrak{p}$上の$K$-不変多項式環）で与えられ，このことから完全積分可能であることも示される。

再び戸田量子力学系に戻って，我々はハミルトニアン$\mathbb{H}_T$と対称空間G/KのLaplace-Beltrami作用素の関係を考察する。ここにG/KはRiemann対称対$(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$に対応するRiemann対称空間である。まず

$$\mathbb{H}_T\Phi = E\Phi \qquad (E : \text{エネルギー})$$

を変形して

$$\left(\Delta - 2\sum_{\alpha\in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha}\right)\Phi = -2E\Phi$$

を得る。$\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$（$\mathfrak{a}=V$ の複素双対空間）を $(\nu,\nu) = -2E$ を満たすようにとる。従って我々の考察する微分方程式は

$$\left(\Delta - 2\sum_{\alpha\in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha}\right)\Phi = (\nu,\nu)\Phi$$

となる。$\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{g}$ の部分リー環で，$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in R_+} \mathfrak{g}^\alpha$ で与えられるものとする。$\mathfrak{n}, \mathfrak{a}$ に対応する G の解析的部分群を夫々 N, A と書く。このとき $G = NAK$ が成立ち，G の各元 g は $g = nak$ $(n\in N,\ a\in A,\ k\in K)$ と一意的に分解する(岩沢分解)。

さて 定数の組 $\{g_\alpha : \alpha\in B\}$ に対し $\mathfrak{n}$ から $\mathbb{R}$ へのリー環としての準同型 η を次のように定める。所で一般に $\mathfrak{n}$ から $\mathbb{R}$ へのリー環としての準同型は 交換子 $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 上 0 で 従って $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 上の1次形式と同一視される。しかるに $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ は $\sum_{\alpha\in B}\mathfrak{g}^\alpha$ と同型であるから η はその $\mathfrak{g}^\alpha$ $(\alpha\in B)$ への制限 η_α で完全に決まる。我々は $\{g_\alpha : \alpha\in B\}$ に対し η_α $(\alpha\in B)$ を

$$|\eta_\alpha|^2 = g_\alpha^2 \qquad (\alpha\in B)$$

を満たすようにとり 固定する。ここに $|\eta_\alpha|$ は $\mathfrak{g}^\alpha$ 上の1次形式 η_α の，$\mathfrak{g}$（従って $\mathfrak{g}^*$）の内積 $-B(x,\theta y)$ に関する長さである。

$\{\eta_\alpha : \alpha\in B\}$ により定まる $\mathfrak{n}$ の準同型 η は，N の一次元表現 ψ_η を

$$\psi_\eta(\exp X) = e^{i\eta(X)} \qquad (X\in\mathfrak{n})$$

により与える。

G 上の C^∞-関数のなす空間 $C^\infty_\eta(G/K)$ を

$$C^\infty_\eta(G/K) = \{ f \in C^\infty(G) : f(ngk) = \psi_\eta(n) f(g) \quad (n\in N,\ k\in K)\}$$

で定義する。岩沢分解 $G=NAK$ より $C^\infty_\eta(G/K)$ の元 f はその A への制限 f_A により完全に決まる。$\mathfrak{a}=V$ 上の C^∞-関数 $f_{\mathfrak{a}}$ を $f_{\mathfrak{a}} = f_A\circ\exp$ で定める。$\rho\in\mathfrak{a}^*$ を

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in R_+} m_\alpha \alpha$$

で定義する。

<u>Lemma 1</u> $f\longmapsto e^{-\rho} f_{\mathfrak{a}}$ は $C^\infty_\eta(G/K)$ と $C^\infty(\mathfrak{a})$ の間の同型対応を定める。更に $L^2_\eta(G/K)=\{f : \int_A |f_A(a)|^2 e^{-2\rho(\log a)} da < \infty\}$ とおくとき，上の対応により $L^2_\eta(G/K)\cong L^2(\mathfrak{a})$ が成立つ。

<u>Corollary 2</u> $\Delta_{G/K}$ を G/K 上の Laplace-Beltrami 作用素とする。このとき任意の $f\in C^\infty_\eta(G/K)$ に対し，

$$e^{-\rho}(\Delta_{G/K} f)_{\mathfrak{a}} = \Big\{\Delta - 2\sum_{\alpha\in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha} - (\rho,\rho)\Big\}(e^{-\rho} f_{\mathfrak{a}}).$$

証明は[4]を参照されたい。

上の系2より次が言える。先ず

$$\Big(\Delta - 2\sum_{\alpha\in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha}\Big)\Phi = (\nu,\nu)\Phi \iff \Big(\Delta - 2\sum g_\alpha^2 e^{2\alpha} - (\rho,\rho)\Big)\Phi = \big((\nu,\nu)-(\rho,\rho)\big)\Phi$$

従って同型 $C^\infty(\mathfrak{a})\cong C^\infty_\eta(G/K)$ により Φ に対応する $C^\infty_\eta(G/K)$ の元を f_Φ と書くことにすれば

$$\Big(\Delta - 2\sum_{\alpha\in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha}\Big)\Phi = (\nu,\nu)\Phi \iff \Delta_{G/K} f_\Phi = \big((\nu,\nu)-(\rho,\rho)\big) f_\Phi$$

言い換えれば戸田量子力学系の固有値問題 $H_T\Phi = E\Phi$ と $L^2_\eta(G/K)$ における $\Delta_{G/K}$ の固有値問題は同値である。

$\mathbb{D}(G/K)$を，G/K上のG-不変微分作用素環とする。$\mathbb{D}(G/K)$は可換な多元環で 実際 $S(\mathfrak{a})^W$ ($=\mathfrak{a}$上のWeyl群不変多項式環)と同型(c.f [2])である。もちろん $\Delta_{G/K}\in\mathbb{D}(G/K)$である。又 $C^\infty_\eta(G/K)$は $\mathbb{D}(G/K)$-加群であることも容易にわかる。上に述べた系2，は次の補題の系である。

<u>Lemma 3</u> (c.f [4]). 各 $D\in\mathbb{D}(G/K)$ に対し，$\delta(D)\in\mathrm{Diff}(\mathfrak{a})$が存在し 任意の $f\in C^\infty_\eta(G/K)$ に対し

$$e^{-\rho}(Df)_{\mathfrak{a}} = \delta(D)(e^{-\rho}f_{\mathfrak{a}}).$$

更に $\delta: D\longmapsto\delta(D)$ は $\mathbb{D}(G/K)\longrightarrow\mathrm{Diff}(\mathfrak{a})$ (中への同型)を与える。

<u>Corollary 4.</u> $\delta(\mathbb{D}(G/K))$の各元は ハミルトニアン $\mathbb{H}_T$ と可換。

すでに述べたように $\mathfrak{g}$が実分解型 のとき {古典戸田系の運動の積分}$\cong S(\mathfrak{p})^K$であった，これと Chevalleyの同型，

$$S(\mathfrak{p})^K\cong S(\mathfrak{a})^W$$

及び Harish-Chandra の同型 $\mathbb{D}(G/K)\cong S(\mathfrak{a})^W$ を用いれば

{古典戸田系の運動の積分}$\cong S(\mathfrak{p})^K\cong S(\mathfrak{a})^W\cong\mathbb{D}(G/K)\cong\delta(\mathbb{D}(G/K))$

をうる。$\delta(\mathbb{D}(G/K))$の元は 戸田量子力学系の"積分"ともいうべきものである。

以下 $(\Delta-2\sum_{\alpha\in B}g_\alpha^2e^{2\alpha})\Phi=(\nu,\nu)\Phi$ の解を構成する。

$L=\{\sum_{\alpha\in B}n_\alpha\alpha$: 各n_αは非負整数$\}$とおく。天下り的ではあるが 次の函数を考える。

$$\Phi_\nu(x)=e^{\nu(x)}\sum_{\lambda\in L}a_\lambda(\nu)e^{\lambda(x)}\qquad(x\in\mathfrak{a}=V).$$

ここに係数 $a_\lambda(\nu)$ は 漸化式

$$a_0(\nu)=1,\quad \{(\lambda,\lambda)+2(\lambda,\nu)\}a_\lambda(\nu) = 2\sum_{\alpha\in B} g_\alpha^2\, a_{\lambda-2\alpha}(\nu) \quad (\lambda\in L\setminus(0))$$

により与えられるものとする。各 $\lambda\in L\setminus(0)$ に対し

$$\sigma_\lambda = \{\nu\in\mathfrak{a}_c^* : (\lambda,\lambda)+2(\lambda,\nu)=0\}$$

とおき $'\mathfrak{a}_c^* = \mathfrak{a}_c^*\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in L\setminus(0)}\sigma_\lambda\right)$ とおく。$'\mathfrak{a}_c^*$ は $\mathfrak{a}_c^*$ の連結，稠密な開集合で，$i\mathfrak{a}^*$ を含む。$\nu\in{}'\mathfrak{a}_c^*$ のとき，$a_\lambda(\nu)$ は上の漸化式により一意的に定まる。

Theorem 5. 級数 $\Phi_\nu(x)$ は $'\mathfrak{a}_c^*\times\mathfrak{a}$ 上広義一様絶対収束し，各 $\nu\in{}'\mathfrak{a}_c^*$ に対し 微分方程式

$$\left(\Delta - 2\sum_{\alpha\in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha}\right)\Phi_\nu = (\nu,\nu)\Phi_\nu$$

を満たす。更に $\Phi_{s\nu}$ $(s\in W)$ もまた上の解である。

証明 (c.f [4]).

注意 上に与えた Φ_ν は $\dim\mathfrak{a}=1$ のとき，第一種変形Bessel関数 I_ν に定数倍を除いて一致する。

命題6 $\mathfrak{a}_- = \{x\in\mathfrak{a} : (\alpha,x)<0\ (\forall\alpha\in B)\}$ とおくとき，

$$\Phi_\nu(x) \sim e^{\nu(x)} \qquad x\to\infty \quad (\mathfrak{a}_- \text{の中で}).$$

次に Φ_ν とは別の固有関数を与える。それは次の積分表示で与えられる。G の元 g の岩沢分解を $g = n\exp H(g)\,k$ $(n\in N,\ H(g)\in\mathfrak{a},\ k\in K)$ と書く。s_0 を W の元で $s_0R_+=-R_+$ なる元とし，

$$W_\nu(x) = e^{(s_0\nu)(x)}\int_{\mathfrak{n}} e^{(\nu+\rho)(H(s_0^{-1}\exp X))}\, e^{-i\eta(e^{\operatorname{ad}x}X)}\,dX \quad (x\in\mathfrak{a}).$$

(dX は $\mathfrak{n}$ 上の Lebesgue 測度) で $W_\nu(x)$ を定義する。

定理 7　上の積分は $\mathrm{Re}(\nu,\alpha)>0$ $(\alpha\in B)$ で絶対一様収束し，ν に関し $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ 上の整関数に解析接続される。$x\in\mathfrak{a}$ の関数として微分方程式 $(\Delta-2\sum_{\alpha\in B}g_\alpha^2 e^{2\alpha})W_\nu=(\nu,\nu)W_\nu$ を満たす。

定理 8　$\mathfrak{a}_+=\{x\in\mathfrak{a}:(\alpha,x)>0\ (^\forall\alpha\in B)\}$ とおく。

このとき $\begin{cases} W_\nu(x)\longrightarrow 0 & (x\to\infty \text{ in } \mathfrak{a}_+) \\ W_\nu(x)\sim C(\nu)e^{(s_0\nu)(x)} & (x\to\infty \text{ in } \mathfrak{a}_-) \end{cases}$

ここに $C(\nu)$ はいわゆる Harish-Chandra の C-関数で Γ-関数を用いて具体的に表示されるものである。(c.f [3])。

(注) $W_\nu(x)$ は $\dim\mathfrak{a}=1$ のとき 第2種変形Bessel関数に定数倍を除いて一致する。又上で与えた Φ_ν, W_ν は $\mathcal{S}(\mathbb{D}(G/K))$ の同時固有関数でもあり W_ν を $\Phi_{s\nu}$ $(s\in W)$ の一次結合として exact に表わすことも可能である。

Calogero 系の固有値問題

Calogero 系のハミルトニアン H_C に対し，$H_C\Phi=E\Phi$，即ち

$$\Big(-\tfrac{1}{2}\Delta+\sum_{\alpha\in R_+}g_\alpha\alpha^{-2}\Big)\Phi=E\Phi$$

の exact な解を構成する。ここに g_α は(2)で与えられた定数。

$V_+=\mathfrak{a}_+$ を定理 8 中で与えられた Weyl 領域とし 我々は V_+ 上で 上の微分方程式の解を決定し V 全体には Weyl 群不変性を満たすように延長する。V_+ 上で 次の関数を考える。

$$\pi(x)=\prod_{\alpha\in R_+}\alpha(x)^{m_\alpha},$$

このとき次の補題が基本的である。

<u>補題9</u>　cを実数とする。このとき

$$\Delta \pi^c = \pi^c \sum_{\alpha\in R_+} \left(m_\alpha(m_\alpha+2m_{2\alpha})c^2 - m_\alpha c\right)(\alpha,\alpha)\,\alpha^{-2}$$

但 $m_{2\alpha}=0$　$(2\alpha\notin R)$ とする。

証明. 直接 $\Delta\pi^c$ を計算することにより

$$\Delta\pi^c = \pi^c\sum_{\alpha\in R_+}(m_\alpha^2c^2 - m_\alpha c)(\alpha,\alpha)\alpha^{-2} + c^2\pi^c \sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} m_\alpha m_\beta(\alpha,\beta)\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

$I = \sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta}} m_\alpha m_\beta(\alpha,\beta)\alpha^{-1}\beta^{-1}$ とおく。Rが被約ルート系のとき $I=0$ を示す。Iは W-不変であることが容易にわかる。$\pi_0 = \prod_{\alpha\in R_+}\alpha$ とおくと R:被約 より π_0 は W-skew invariant。従って $\pi_0 I$ も W-skew invariant な多項式。所が $\pi_0 I$ の次数は π_0 の次数より小。$\pi_0 I$ は π_0 で割り切れねばならぬ。これは $I=0$ に限る。Rが被約でないとき、$R=(BC)_l$ 型であることと被約ルート系における結果からやはり補題を得る。

上の補題より $\Phi = \pi^c\Psi$ により関数Ψを導入すれば

$$\Big(\Delta - \sum_{\alpha\in R_+}\left(m_\alpha(m_\alpha+2m_{2\alpha})c^2 - m_\alpha c\right)(\alpha,\alpha)\alpha^{-2}\Big)\Phi = -2E\Phi$$

はΨに関する微分方程式

$$L_c\Psi + 2E\Psi = 0$$

に変わる。ここに L_cは次で与えられるV上の微分作用素。

$$L_c = \Delta + 2c\sum_{\alpha\in R_+} m_\alpha \alpha^{-1}H_\alpha$$

但し H_α は $\alpha\in V$の定める一階の微分作用素（即ち $(H_\alpha f)(x) = \frac{d}{dt}f(x+t\alpha)\big|_0$.

<u>注意</u>　$C^\infty(\mathfrak{p})^K$ を $\mathfrak{p}$上のK-不変 C^∞-関数の空間，$\Delta_{\mathfrak{p}}$ をKilling形式に関する$\mathfrak{p}$のLaplace-Beltrami作用素とする。この

とき $(\Delta_{\mathfrak{p}} f)_{\mathfrak{a}} = L_{1/2} f_{\mathfrak{a}}$ が任意の $f \in C^\infty(\mathfrak{p})^K$ に対し成立つ。但し $f_{\mathfrak{a}}$ は f の $\mathfrak{a}$ への制限とする。これにより $c=1/2$ のときは $\mathfrak{p}$ 上の K-不変関数で $\Delta_{\mathfrak{p}}$ の固有関数であるものと Calogero系の固有関数が対応する。$\Delta_{\mathfrak{p}}$ の $L^2(\mathfrak{p})^K$ におけるスペクトル分解はカルタン運動群の表現論を用いてよく知られている。ここでは c が1般の場合に $L_c\Psi + 2E\Psi = 0$ の解を変数分離法により求めてみる。

$r = (x,x)^{1/2}$ $(x \in V)$ とおき $\Psi(x) = f(r)P(x)$ (但し $P(x)$ は V 上の k次斉次多項式) の形の解を求めよう。f 及び P は次の微分方程式の解でなければならぬ。

$$(*) \quad f''(r) + (2cM + l - 1 + 2k)r^{-1} f' + 2Ef = 0 \qquad (\text{但}. \ M = \sum_{\alpha \in R_+} m_\alpha).$$

$$(**) \quad L_c P = 0$$

(*) は Bessel の微分方程式で、原点で正則な解は

$$f_{k,E}(r) = r^{-(a+k)} J_{a+k}(\sqrt{2E}\, r) \qquad (a = cM + l/2 - 1)$$

で与えられる。

$V_k = \{P :$ k次斉次多項式 かつ $L_c P = 0\}$ とおく。V_k の元は W-不変 (但し $m_\alpha c \notin -\mathbb{N}$ のとき) であることが示される。そこで I^k で、W-不変 k次斉次多項式の空間を表わすとき $L_c(I^k) \subset I^{k-2}$ が成立ち、従って $\dim I^k > \dim I^{k-2}$ なる k に対しては $\dim V_k > 0$ である。そのような k は W-不変多項式環のポアンカレ級数を用いて決定可能である。

半単純対称空間に付随した力学系.

最後に 半単純対称空間に付随した力学系について簡単に述べる。定義3で与えたハミルトニアン $\mathbb{H}_S$ も又 半単純対称空間の Laplace-Beltrami 作用素と密接に関係している。

補題10. $\mathfrak{a}_0^+$ を $\mathfrak{a}_0$ の1つのWeyl領域とする。$\mathfrak{a}_0^+$ 上の関数 δ を

$$\delta(x) = \prod_{\alpha\in R_+} (\operatorname{sh}\alpha(x))^{m_\alpha^+} \prod_{\alpha\in R_+} (\operatorname{ch}\alpha(x))^{m_\alpha^-}$$

で与える。このとき c を実定数として

$$\delta^{-c}\Delta\delta^{c} = 4c^2(\rho_0,\rho_0) + \sum_{\alpha\in R_+}(\alpha,\alpha)\left\{\frac{m_\alpha^+(m_\alpha^+ + 2m_{2\alpha}^+)c^2 - m_\alpha^+ c}{\operatorname{sh}^2\alpha} - \frac{m_\alpha^-(m_\alpha^- + 2m_{2\alpha}^+)c^2 - m_\alpha^- c}{\operatorname{ch}^2\alpha}\right\}$$

が成立つ。ここに $\rho_0 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+}(m_\alpha^+ + m_\alpha^-)\alpha$ とおいた。

証明. 補題9. と類似の方法による。又 $(m_\alpha^+ - m_\alpha^-)m_{2\alpha}^- = 0$ なる関係を用いる。

この補題を用いれば $\mathbb{H}_S\Phi = E\Phi$ は

$$\{\Delta - \delta^{-c}\Delta\delta^{c} - 4c^2(\rho_0,\rho_0)\}\Phi = -2E\Phi$$

と変形される。所で半単純対称空間 G/H の Laplace-Beltrami作用素の 分解 $G=KA_0H$ に関する動径部分を $L_{1/2}$ と書くとき

$$\delta^{-1/2}\circ L_{1/2}\circ\delta^{1/2} = \Delta - \delta^{-1/2}\Delta\delta^{1/2}$$

が成立する。従って $c=1/2$ の場合 固有値問題 $\mathbb{H}_S\Phi=E\Phi$ は半単純対称空間の Laplace-Beltrami 作用素の固有値問題に帰着される。大島-関口-松木氏等によって発展を遂げつつある 半単純対称空間上の調和解析の諸結果が ここに於て重要な役

割を果すであろう。尚 対応する古典系について考察することは 興味深い問題であると思われる。

文献

[1] F. Calogero, J.M.P., 12 (1971).

[2] Harish-Chandra, Amer. J. Math., 80, (1958).

[3] M. Hashizume, Japan. J. Math., 5, (1979).

[4] M. Hashizume, Preprint.

[5] B. Kostant, Advance in Math., 34, (1979).

[6] J. Moser, Advance in Math., 16, (1975).

[7] M. Olshanetsky – A. Perelomov, Invent. Math., 37, (1976).

[8] T. Oshima - J. Sekiguchi, Invent. Math., 57, (1980).