数理解析研究所講究録
第 426 巻 1981 年 64-70

対称空間上の L_p 解析 I

鳥取大 教養部
熊原啓作

Gを連結半単純 Lie 群で中心有限とし，Kをその一つの極大 compact 部分群とする。$G=KA_0N_0$を一つの岩沢分解，$\mathfrak{a}$をAの Lie 環，$\mathfrak{a}_0^*$を$\mathfrak{a}_0$の双対とする。G上のK両側不変，可積分関数fに対して，その spherical Fourier 変換（spherical Gelfand 変換ともいう）$\tilde{f}$は$\mathfrak{a}_0^*$上の関数であるが，それは$\mathfrak{a}_0^*$の複素化$\mathfrak{a}_c^*$のある tube domain にまで拡張され，そこで Riemann-Lebesgue の定理が成立する（[2, p336] および本録，江口氏の論説参照）．この結果が対称 Riemann 空間上の Fourier 変換，さらにはGの各 cuspidal parabolic 部分群Pに対応する主P系列に対しても成立することを示す。

§1．記号と準備

G, K, A_0, N_0を上の通りとする。M_0を$\mathfrak{a}_0$のKにおける中心化群，$P_0=M_0A_0N_0$を極小 parabolic 部分群とする。

$P=MAN$を$P\supset P_0$なるparabolic部分群（ただし$P\neq G$）とする。すると$A\subset A_0$である。A, NのLie環をそれぞれ$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$とし$\rho_P(H)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}H)_{\mathfrak{n}}$　$(H\in\mathfrak{a})$とおく。$P=P_0$のときはρ_0と表す．dkをK上の正規化したHaar測度，dxを$x=ka_0n_0$　$(k\in K,\ a_0\in A,\ n_0\in N)$のとき$dx=e^{2\rho_0(\log a_0)}dk\,da_0\,dn_0$となるように正規化された標準Haar測度とする。$P_M=P_0\cap M$, $K_M=K\cap M$, $A_M=A_0\cap M$, $N_M=N_0\cap M$とおく．P_MはMのminimal parabolic部分群で，$M=K_MA_MN_M$はMの岩沢分解を与える．$\mathfrak{a}_M$, $\mathfrak{n}_M$をA_M, N_MのLie環とし，${}^*H\in\mathfrak{a}_M$に対して$\rho_M({}^*H)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^*H)_{\mathfrak{n}_M}$とおく．$m={}^*k\,{}^*a\,{}^*n\in K_MA_MN_M$に対してMの標準Haar測度は$dm=e^{2\rho_M(\log {}^*a)}d{}^*k\,d{}^*a\,d{}^*n$である．

(σ, V_σ)をMの既約ユニタリ表現とし，$\lambda\in\mathfrak{a}_c^*$に対してPの$V_\sigma$上への表現$\sigma_\lambda$を$\sigma_\lambda(man)=\sigma(m)e^{-i\lambda(\log a)}$によって定義する．$\delta_P(man)=e^{2\rho_P(\log a)}$とおき，$\delta_P^{1/2}\sigma_\lambda$なるPの表現をGに誘導したものを$\pi_{\sigma,\lambda}^{(P)}$とする．その表現空間$\mathcal{H}_\sigma$はK上の$V_\sigma$値可測関数で，$\phi(km)=\sigma(m)^{-1}\phi(k)$, $k\in K$, $m\in K_M$, かつ$\|\phi\|^2=\int_K|\phi(k)|^2dk<\infty$なる$\phi$からなる．$x=\kappa(x)m(x)\exp(H_P(x))n(x)\in KMAN$のとき

$$(\pi_{\sigma,\lambda}^{(P)}(x)\phi)(k)=\sigma(m(x^{-1}k))^{-1}e^{(i\lambda-\rho_P)(H_P(x^{-1}k))}\phi(\kappa(x^{-1}k))$$

($k\in K$, $\phi\in\mathfrak{H}_\sigma$) である.

§2. Riemann-Lebesgue の定理.

$f\in L^1(G)$ の Fourier 変換を

$$\tilde{f}_P(\sigma,\lambda)=\int_G f(x)\,\pi^{(P)}_{\sigma,\lambda}(x)\,dx \qquad (\sigma\in\hat{M},\ \lambda\in\mathfrak{a}^*)$$

によって定義する. $f\in C_c(G)$ ならば $\tilde{f}_P(\sigma,\lambda)$ は $\hat{M}\times\mathfrak{a}_c^*$ で意味をもつ. このとき

$$\tilde{f}_P(\sigma,\lambda;k_1,k_2)=\int_{M\times A\times N} f(k_1 man k_2^{-1})\,e^{(\rho_P-i\lambda)(\log a)}\,\sigma(m)\,dm\,da\,dn$$

とおけば,

$$(\tilde{f}_P(\sigma,\lambda)\phi)(k_1)=\int_K \tilde{f}_P(\sigma,\lambda;k_1,k_2)\,\phi(k_2)\,dk_2$$

である. $P=P_0$ とし, f が右 K 不変ならば $\sigma\neq id.$ (= M の恒等表現) のとき $\tilde{f}_P(\sigma,\lambda;k_1,k_2)=0$ ($\forall\lambda,\ \forall k_1,k_2$) であって,

$$\tilde{f}_P(id.,\lambda;k_1,k_2)=\int_{A\times N} f(k_1a_0n_0)\,e^{(-i\lambda+\rho_0)(\log a_0)}\,da_0\,dn_0$$

となり, これは G/K 上の Fourier-Laplace 変換である.

Lemma 1. M の各元は A の元と可換であり, $A_0=A_M A$

$N_0 = N_M N$ は直積である．もし $H_0 = {}^*H + H$ $({}^*H \in \mathfrak{a}_M$, $H \in \mathfrak{a}$) ならば $\rho_0(H_0) = \rho_M({}^*H) + \rho_P(H)$ である．

今，$\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$ と $\mu \in \mathfrak{a}_{Mc}^*$ との直和 $\lambda \oplus \mu$ を $H_0 = {}^*H + H$ $(H_0 \in \mathfrak{a}_0,\ {}^*H \in \mathfrak{a}_M,\ H \in \mathfrak{a})$ に対して $(\lambda \oplus \mu)(H_0) = \mu({}^*H) + \lambda(H)$ と定義する。上の Lemma より $\rho_0 = \rho_P \oplus \rho_M$ である．M_0' を A_0 の K における正規化群，$W = M_0'/M_0$ を G/K の Weyl 群，$[W]$ を W の位数とする．Δ^+ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_0)$ の正の root 全体とし，$\mathfrak{a}_0^+ = \{H \in \mathfrak{a}_0 \mid \alpha(H) > 0\ (\forall \alpha \in \Delta_+)\}$ を正の Weyl 領域とする．C_{ρ_0} を $\{s\rho_0 \mid s \in W\}$ の $\mathfrak{a}_0^*$ における凸閉包とする．

$$\mathcal{F}' = \{\lambda \in \mathfrak{a}_c^* \mid \mathrm{Im}(\lambda \oplus \rho_M) \in C_{\rho_0}\}$$

とおく．

Lemma 2. $\mathcal{F}' = \{\lambda \in \mathfrak{a}_c^* \mid |\mathrm{Im}(s(\lambda \oplus \rho_M))(H)| \leq \rho_0(H)\ \ \forall H \in \mathfrak{a}_0^*,\ s \in W\}$.

Lemma 3. f を G 上の両側 K 不変，非不値可積分関数とすれば，$\lambda \in C_{\rho_0}$ のとき

$$\int_{A_0\times N_0} f(a_0 n_0)\, e^{(\lambda+\rho_0)(\log a_0)}\, da_0\, dn_0 \leq [W]\, \|f\|_1$$

である.

$f\in L^1(G)$ とする. $f_1(x)=\int_{K\times K}|f(kxk')|\,dk\,dk'$ とおけば f_1 は Lemma 3 の条件をみたす. 今 $\lambda\in\mathfrak{F}'$, $\lambda=\xi+i\eta$, とすれば,

$$\int_{K\times M\times A\times N\times K} |f(k_1 m a n k_2^{-1})|\, e^{(\eta+\rho_p)(\log a)}\, dk_1\, dm\, da\, dn\, dk_2$$

$$=\int_{K_M\times A_M\times N_M\times A\times N} f_1({}^*k\,{}^*a\,{}^*n\, a n)\, e^{2\rho_M(\log {}^*a)+(\eta+\rho_p)(\log a)}\, d^*k\, d^*a\, d^*n\, da\, dn$$

$$=\int_{A_0\times N_0} f_1(a_0 n_0)\, e^{((\eta\oplus\rho_M)+\rho_0)(\log a_0)}\, da_0\, dn_0$$

$$\leqq [W]\, \|f\|_1$$

を得る. 従って $M\times A$ 上の関数

$$\psi(m,a)=\int_N f(k_1 m a n k_2^{-1})\, dn\, e^{(\eta+\rho_p)(\log a)}$$

は Fubini の定理によって殆んどすべての $(k_1, k_2)\in K\times K$ に対して可積分である. そこで Dixmier [1] による次の Lemma を使う.

Lemma 4. G を局所 compact 群, $\hat{G}$ を既約ユニタリ表現の

同値類の集合に hull-kernel topology を入れたものとする.
$f \in L^1(G)$, $[\pi] \in \hat{G}$ に対して

$$\hat{f}(\pi) = \int_G f(x)\pi(x)\,dx$$

とおく. すると $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \omega$: $\hat{G}$ の compact set, $\pi \notin \omega$
$\Rightarrow$ $\|\hat{f}(\pi)\| < \varepsilon$.

$$\hat{f}_P(\sigma, \lambda ; k_1, k_2) = \int_{M\times A} \psi(m, a)\, e^{-i\xi(\log a)} \sigma(m)\, dm\, da$$

であるから, Lemma 4 より次の定理を得る.

定理（Riemann-Lebesgue） $f \in L^1(G)$ とする. $(\sigma, \lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{F}'$ であって $\mathrm{Im}\,\lambda$ = 一定ならば, 殆んどすべての $(k_1, k_2) \in K \times K$ に対して, $(\sigma, \lambda) \to \infty$ のとき $\hat{f}_P(\sigma, \lambda ; k_1, k_2) \longrightarrow 0$ となる.

文　献

[1] Dixmier : Les C*-algèbres et leur représentations. Gauthier-Villars, Paris (1969).

[2] G. Warner : Harmonic Analysis on Semi-Simple

Lie Groups II. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1972).

本稿の内容は次の論文に発表されている.

M. Eguchi and K. Kumahara : Riemann-Lebesgue lemma for real reductive groups, Proc. Japan Acad. 56 (1980), 465-468.