数理解析研究所講究録
第 430 巻 1981 年 68-79

L_r空間におけるNavier-Stokes初期値問題

広島大 理　　宮川 鉄朗

§1. はじめに.

$\mathbb{R}^n$ $(n\geqq 2)$ の有界領域 D において、Navier-Stokes方程式の初期値問題

$$
(E)\left\{\begin{array}{ll}
\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+(u,\nabla)u=f-\nabla p & (t>0,\ x\in D)\\
\operatorname{div} u=0 & (t>0,\ x\in D)\\
u|_S=0 & \\
u(x,0)=a(x) & (x\in D)
\end{array}\right.
$$

を考える。Dの境界Sは、なめらかとする。$u=\{u^j(x,t)\}_{j=1}^n$, $p=p(x,t)$は、求めるべき速度ベクトルと圧力を、$a=\{a^j(x)\}_{j=1}^n$ $f=\{f^j(x,t)\}_{j=1}^n$は、与えられた初期速度と外力をあらわす。
よく知られた直交分解：

$$(L_2(D))^n=X_2\oplus G_2$$

(1)
$$X_2=\{w\in(C_0^\infty(D))^n;\ \operatorname{div} w=0\} \text{ の } L_2\text{-閉包}$$
$$G_2=\{\nabla p\ ;\ p\in \hat{W}_2^1(D)\}$$

を用いることにより，圧力項が消去される。すなわち，$P:(L_2(D))^n \to X_2$ を直交射影とするとき，(E)は，X_2における発展方程式：

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+Au=Pf+Fu, & t>0\\ u(0)=a, & (Fu=-P(u,\nabla)u)\end{cases}$$

に変換される。$A=-P\Delta$は，X_2におけるStokes作用素と呼ばれるもので，$D(A)=\{u\in(W_2^2(D))^n;\ u|_S=0\}\cap X_2$ なる正値自己共役作用素である。Hopf[9]は，$n=2,3$のとき，任意の$a\in X_2$に対して（Pfに適当な仮定を入れて）(I)が大域的な弱解をもつことを示した（$n\geqq4$の場合は[13]参照）。しかし，$n\geqq3$のときには，Hopfの解の一意性，正則性については，殆んどわかっていない。そこで，a, Pfに対して，様々な仮定を置いて，Hopfのよりも正則な解を求める試みが多くの人々によってなされた。その結果は，書物[12]にまとめられているが，一般に局所解の存在が知られているだけである。

この方向での最良の結果は，加藤－藤田[3]，[11]によるものである。彼等は，$-A$がX_2において解析半群$\{e^{-tA};t\geqq0\}$を生成することを用いて，(I)を積分方程式：

$$(\mathrm{II})\qquad u(t)=e^{-tA}a+\int_0^t e^{-(t-s)A}\{Fu(s)+Pf(s)\}ds$$

の形で考察した。そして（Pfに対するある仮定の下で）任意の

$a \in D(A^{1/4})$ $(n=3)$ に対して (II) が局所解をもつこと，a と Pf が十分小ならばその解が大域的に存在すること，さらに Pf がある種の Hölder 条件を満たせば，得られた解が古典解であることを示した。これらの結果は，井上－脇本 [10] により $n=4, 5$ の場合に拡張された。それによれば，$n=4$ のとき $a \in D(A^{1/2})$，$n=5$ のとき $a \in D(A^{3/4})$ を仮定すれば，[11] と同様のことがらが示される。$n \geq 6$ のときは，正則解の存在は知られていない。

本講の目的は，積分方程式 (II) を，一般の L_r 空間 $(1<r<\infty)$ で解くことである。その結果，$r \geq n$ ならば，「$a \in D(A^{\alpha})$」の形のなめらかさの仮定が不要であることがわかる。我々の議論は，任意の $n \geq 2$ に対して適用する。議論のカナメとなるのは、次の事実である。

(イ) $(L_r(D))^n$ のある部分空間で，Stokes 作用素 A が定義され，$-A$ が解析半群を生成すること。

(ロ) 分数巾 A^{α} の定義域が，複素補間空間として，explicit に求められること。

(イ)は，東大の儀我美一氏 [6]，筆者 [14]，及び Solonnikov [16] によって，(ロ)は，儀我氏 [7] によって示された。本講で述べる結果は，儀我氏と筆者との共同研究 [8] によって得られたものである。

§2. Stokes作用素.

分解(1)は、藤原-森本[5]によって、次のように拡張されている。

定理([5]). $1<r<\infty$ のとき、次が成立する。

(i). $(L_r(D))^n = X_r \oplus G_r$ (直和), $X_r = \{w \in (C_0^\infty(D))^n ; \operatorname{div} w = 0\}$ の L_r-閉包, $G_r = \{\nabla p ; p \in \overline{W}_r^1(D)\}$.

(ii) $X_r^* = X_{r'}$, $X_r^\perp = G_{r'}$, $r' = r/(r-1)$. ここに, X_r^*($X_r^\perp$) は, X_r の dual space (annihilator) をあらわす。

P_r を, 上の分解に対応する X_r への射影とする。$A_r = -P\Delta$ を, $D(A_r) = X_r \cap \{u \in (\overline{W}_r^2(D))^n ; u|_S = 0\}$ の上で定義すると, X_r での閉作用素で有界な逆をもつことが知られている ([2])。A_r を X_r における Stokes作用素と呼ぶ。次の事実も[5]による。

(2) $A_r^* = A_{r'}$, $P_r^* = P_{r'}$。

ここに, $*$ は dual operator をあらわす。以下, 単に A, P と記す。

定理1([6],[14],[16]). $-A$ は, 各 X_r ($1<r<\infty$) において, 一様有界な解析半群 $\{e^{-tA} ; t \geq 0\}$ を生成する。

[14], [16] では, 非定常Stokes方程式の L_r 評価式から出発して, 定理1が導かれている。[6] では, 擬微分作用素を用いて直接に A の resolvent を構成し, それの評価によって, 証明している。[6] による resolvent の構成を用いることで, 次の定理2の証明が可能となる。

<u>定理2([7])。</u> $0<\alpha<1$ とする。分数巾 A^{α} の定義域 $D(A^{\alpha})$ は、複素補間空間 $[X_r, D(A)]_{\alpha}$ に一致する。(複素補間空間については[1]参照)。

さて、$B=-\Delta$ を $(L_r(D))^n$ における Dirichlet 条件付きの Laplace 作用素とする。藤原[4]によれば、

$$D(B^{\alpha}) = [(L_r(D))^n, D(B)]_{\alpha} \hookrightarrow (H_r^{2\alpha}(D))^n \quad (\text{埋め込みは連続})$$

である。このことと、$D(A)=X_r\cap D(B)$、それに定理2から、

(3) $\qquad D(A^{\alpha}) = X_r \cap D(B^{\alpha}), \qquad 0\leq\alpha\leq 1$

が従う。

以下、我々は、$\alpha<0$ に対して、

(4) $\qquad D(A^{\alpha}) = D(A_{r'}^{-\alpha})^*, \quad (A=A_r).$

とおく。次の補題は、(2)を用いて容易に確かめられる。

<u>補題3.</u> $\alpha<0$ のとき、$D(A^{\alpha})$ は、ノルム $\|A^{\alpha}u\|$ による X_r の完備化と一致する。ここに、$\|\cdot\|$ は普通の L_r-ノルムである。

この事実と、よく知られた評価：$\|A^{\beta}e^{-tA}\|\leq C_{\beta}t^{-\beta}$, $(\beta\geq 0)$ とから、次の定理は容易にわかる。

<u>定理4.</u> 任意の $\alpha\leq\beta$ に対し、e^{-tA} $(t>0)$ は、$D(A^{\alpha})$ から $D(A^{\beta})$ への有界作用素を定める。特に、任意の α に対して、$\{e^{-tA}; t\geq 0\}$ は、$D(A^{\alpha})$ 上で、一様有界な解析半群を定める。

§3. 結果.

前節の結果を利用して，積分方程式

$$(\mathrm{II})\qquad u(t)=e^{-tA}a+\int_0^t e^{-(t-s)A}\{Fu(s)+Pf(s)\}ds$$

を各X_rで解く。次の補題が基本的である。

補題5. $0\leq\delta<1/2+n(1-1/r)/2$とする。このとき，$\theta>0,\ \rho>0,\ \rho+\delta>1/2,\ \theta+\rho+\delta\geqq n/2r+1/2$ならば，

(5) $\|A^{-\delta}P(u,\nabla)v\|\leqq M\|A^{\theta}u\|\cdot\|A^{\rho}v\|$，($\|\cdot\|$：$L_r$−ノルム)

が成り立つ。定数$M>0$は，θ,ρ,δ,rに依存するが，$u\in D(A^{\theta})$ $v\in D(A^{\rho})$にはよらない。

証明の概略を述べる。(3)により，$(\partial/\partial x_j)IA_{r'}^{-1/2}:X_{r'}\to(L_{r'}(D))^n$は有界である($I:X_{r'}\hookrightarrow(L_{r'}(D))^n$, inclusion)から，dualをとれば，$A^{-1/2}P\,\partial/\partial x_j:(L_r(D))^n\to X_r$が，有界作用素として一意に定まることに注意する。評価(5)は，dense subsetsに属するu,vに対して証明されれば十分だから，$u,v\in(C^1(\bar{D}))^n$とする。$\operatorname{div}u=0$より，$P(u,\nabla)v=\sum Pu^j\partial v/\partial x_j=\sum P\partial(u^jv)/\partial x_j$である。

(i) $\delta\geqq1/2$のとき。$\delta=\varepsilon+1/2$とおく。(3)とSobolevにより，$A_{r'}^{-\varepsilon}:X_{r'}\to X_{s'}$ ($1/s'=1/r'-2\varepsilon/n$)は有界，従って，$A^{-\varepsilon}:X_s\to X_r$ ($1/s=1-1/s'=1/r+2\varepsilon/n$)は有界である。よって，$\|A^{-\delta}P(u,\nabla)v\|\leqq\sum\|A^{-\varepsilon-1/2}P(\partial/\partial x_j)(u^jv)\|$

$$\leq C \sum \| A^{-1/2} P (\partial/\partial x_j)(u^j v) \|_{X_s}$$

$$\leq C \| |u| \cdot |v| \|_{L_s} \leq C \| u \|_{X_p} \| v \|_{X_q}$$

($1/p + 1/q = 1/s$), が従う。最後の項に Sobolev の補題を用いて (5) を得る。((3) に注意).

<u>(ii) $\delta = 0$ のとき.</u> P は有界だから,

$$\| P(u, \nabla) v \| \leq C \| (u, \nabla) v \| \leq C \| u \|_{X_p} \| \nabla v \|_{L_q}$$

($1/p + 1/q = 1/r$)。これに Sobolev を適用すればよい。

<u>(iii) $0 < \delta < 1/2$ のとき.</u> $\delta = 0$, $\delta = 1/2$ の場合の結果に対し, 補間空間の理論を適用すればよい。((4), 補題3, を参照)。

<u>注意.</u> 補題5は, [3], [10], [11] の対応する結果を特別の場合として含む。上記の証明は, それらに対するものより, ずっと簡単である。

さて, (II) の解法を考える。[11] に従って, 次の iteration scheme を用いる。

$$(6) \begin{cases} u_0(t) = e^{-tA} a + \int_0^t e^{-(t-s)A} Pf(s)\, ds \\ u_{m+1}(t) = u_0(t) + \int_0^t e^{-(t-s)A} F u_m(s)\, ds, \quad m \geq 0. \end{cases}$$

$n/2r - 1/2 \leq \gamma < 1$, $0 \leq \delta < 1 - |\gamma|$, $0 < \gamma + \delta < 1$, なる r, γ, δ を固定する。a, Pf には次の仮定をおく。

$$(7) \begin{cases} a \in D(A^{\gamma}), \quad Pf \in C((0, T]; D(A^{-\delta})), \\ \| A^{-\delta} Pf(t) \| = o(t^{\gamma + \delta - 1}) \quad \text{as } t \downarrow 0. \end{cases}$$

すると、(6)から、

$$\|A^\alpha u_0(t)\| \leq \|A^{\alpha-\gamma}e^{-tA}A^\gamma a\| + \int_0^t \|A^{\alpha+\delta}e^{-(t-s)A}\|\,\|A^{-\delta}Pf(s)\|ds$$

$$\leq \|A^{\alpha-\gamma}e^{-tA}A^\gamma a\| + C_{\alpha,\delta}\int_0^t (t-s)^{-\alpha-\delta}s^{\gamma+\delta-1}ds \times N$$

$$\leq K_{\alpha 0}t^{\gamma-\alpha} \quad (\gamma \leq \alpha < 1-\delta),$$

$$K_{\alpha 0} = \sup_{0<t\leq T} t^{\alpha-\gamma}\|A^{\alpha-\gamma}e^{-tA}A^\gamma a\| + C_{\alpha,\delta}NB(1-\delta-\alpha, \gamma+\delta),$$

$$N = \sup_{0<t\leq T} t^{1-\gamma-\delta}\|A^{-\delta}Pf(t)\|.$$

が従う。(ここで、例えば$\|A^{-\delta}Pf(t)\|$は、$Pf(t)$の$D(A^{-\delta})$-ノルムである)。$B(p,q)$は、ベータ関数をあらわす。さて、ある$m\geqq 0$に対して、

$$(8) \qquad \|A^\alpha u_m(t)\| \leqq K_{\alpha m}t^{\gamma-\alpha} \quad (\gamma \leq \alpha < 1-\delta)$$

なる評価が得られたとして、$\theta>0$, $\rho>0$, $\rho+\delta>1/2$, $\theta+\rho+\delta=1+\gamma\ (\geqq n/2r+1/2)$, $\theta, \rho<1-\delta$, なるθ, ρを一組えらんで固定する。γ,δに対する仮定により、それは可能である。すると、補題5によって、

$$\|A^\alpha u_{m+1}(t)\| \leq K_{\alpha 0}t^{\gamma-\alpha} + \int_0^t \|A^{\alpha+\delta}e^{-(t-s)A}\|\,\|A^{-\delta}\tilde{H}u_m(s)\|ds$$

$$\leq K_{\alpha 0}t^{\gamma-\alpha} + C_{\alpha,\delta}M\int_0^t (t-s)^{-\alpha-\delta}\|A^\theta u_m(s)\|\,\|A^\rho u_m(s)\| \times ds$$

$$\leq \{K_{\alpha 0} + C_{\alpha,\delta}MK_{\theta m}K_{\rho m}B(1-\delta-\alpha, \gamma+\delta)\}t^{\gamma-\alpha}.$$

したがって、

$$K_{\alpha,m+1} = K_{\alpha,0} + C_{\alpha,\delta} M K_{\theta m} K_{\rho m} B(1-\delta-\alpha, \gamma+\delta)$$

とおけば，mを$m+1$におきかえて(8)が成りたつ。$m=0$の場合はすでにcheckしたから，結局すべての$m \geq 0$に対して，(8)が成りたつ。$t \downarrow 0$のとき，$t^{\alpha-\gamma}\|A^{\alpha-\gamma}e^{-tA}A^{\gamma}a\| \to 0$ $(\gamma<\alpha)$，$t^{1-\gamma-\delta}\|A^{-\delta}Pf(t)\| \to 0$，に注意すれば，[11]と全く同様にして，次の諸定理が証明される。

<u>定理6.</u> $n/2r - 1/2 \leq \gamma < 1$，$0 \leq \delta < 1-|\gamma|$，$0 < \gamma+\delta$とし，$a$，$Pf$は(7)を満たすとする。このとき，正数$T_*$ $(\leq T)$が定まり，積分方程式(II)は，$[0, T_*]$上で，次のような一意的な解$u(t)$をもつ。(i) $u \in C([0,T_*]; D(A^{\gamma}))$；(ii) ある$\beta > |\gamma|$が存在して，$u \in C((0,T_*]; D(A^{\beta}))$，$\|A^{\beta}u(t)\| = o(t^{\gamma-\beta})$，$(t \downarrow 0)$．さらに，$Pf$が$X_r$-値関数として，各$[\varepsilon, T]$ $(0<\varepsilon<T)$上でHölder連続ならば，上記$u(t)$は$[0, T_*]$上で，発展方程式(I)を満たす。

<u>定理7.</u> $Pf(t)$が$(0,\infty)$上で定義され，$\|A^{\gamma}a\|$，$\sup_{t>0} t^{1-\gamma-\delta}\|A^{-\delta}Pf(t)\|$が十分小ならば，定理6で得られた解$u(t)$は，$[0,\infty)$上で存在する。

<u>注意.</u> (a) 上記定理で，$r=2$，$n=2,3,4,5$とおけば，[10]，[11]の結果が得られる。

(b). $r > n$の場合は初期値aのクラスは，X_rよりも広い。実際，この場合は$\gamma<0$が許される。

(c) 上の定理では，$n/2r-1/2<1$ を仮定した。これが成り立たない r に対しては，iteration scheme (6) を X_r で用いることが出来ない。しかし，$\gamma \geqq n/2r-1/2 \geqq 0$ ならば $D(A^\gamma) \subset X_n$ (Sobolevによる，(3)参照)だから，$a \in X_n$ とみなして，X_n内で(II)を解くことが出来る。

$u(t)$のなめらかさについては，次のことが示される。

定理8. $f \in (C^\infty(\bar{D} \times (0,T]))^n \Rightarrow u \in (C^\infty(\bar{D} \times (0,T_*]))^n$.

詳細は[8]を見られたい。

注意. (d). 簡単のため $Pf=0$ とする。$r>n$, $a \in X_r$ ならば，定理6-7の解は，Hopfの弱解のクラスでuniqueである。$r=n$, $a \in X_n$ のときは，aが十分小ならば，同じことが言えるが，一般には未解決である。([14]).

(e) Weissler [17] は，$D=R_+^n$ (半空間，$n \geqq 3$)の場合に，積分方程式(II)を考察し，我々のよりもやや弱い結果を得た。[17]における仮定は次の通りである。

$n/2r-1/2<\gamma<1$, $-1/4<\gamma$, $Pf=0$.

(f). Sobolevskii は [15] において，$1<r \leqq n$ の場合に，我々と同様の結果を得たことを報告している。しかし，証明の詳細は明らかにされていない。[15]における議論には不備があるように思われる。

References

[1] A. P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math. 24 (1964), 113-190.

[2] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 31 (1961), 308-340.

[3] H. Fujita and T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, Arch. Rational Mech. Anal. 16 (1964), 269-315.

[4] D. Fujiwara, On the asymptotic behaviour of the Green operators for elliptic boundary problems and the pure imaginary powers of some second order operators, J. Math. Soc. Japan 21 (1969), 481-521.

[5] D. Fujiwara and H. Morimoto, An L_r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I 24 (1977), 685-700.

[6] Y. Giga, Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L_r spaces, (submitted to Math. Z.).

[7] Y. Giga, Domains in L_r spaces of fractional powers of the Stokes operator, (submitted to Arch. Rational Mech. Anal.).

[8] Y. Giga and T. Miyakawa, Solutions in L_r to the Navier-Stokes initial value problem, (submitted to Arch. Rational Mech. Anal.).

[9] E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachr. 4 (1950-51), 213-231.

[10] A. Inoue and M. Wakimoto, On existence of solutions of the Navier-Stokes equation in a time dependent domain, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I 24 (1977), 303-320.

[11] T. Kato and H. Fujita, On the nonstationary Navier-Stokes system, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 32 (1962), 243-260.

[12] O. A. Ladyzhenskaya, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New York, 1969.

[13] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[14] T. Miyakawa, On the initial value problem for the Navier-Stokes equations in L^p spaces, Hiroshima Math. J. 11 (1981), 9-20.

[15] P. E. Sobolevskii, Study of Navier-Stokes equations by the methods of the theory of parabolic equations in Banach spaces, Soviet Math. Dokl. 5 (1964), 720-723.

[16] V. A. Solonnikov, Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations, J. Soviet Math. 8 (1977), 467-529.

[17] F. B. Weissler, The Navier-Stokes initial value problem in L^p, Arch. Rational Mech. Anal. 74 (1980), 219-230.

12