数理解析研究所講究録
第430巻 1981年 110-131

ある非適合一次要素による移流拡散問題の有限要素近似について

富山商船高専　大森克史

0. 序　Stokes問題を解くのに有効な非適合一次要素を使って、移流拡散問題の有限要素近似を考え、そのスキームが離散最大値原理を満たすことを示す．また、近似解の L^2-収束性についても論ずる．

1. 連続問題　$\Omega \subset R^n$ を多面体領域とし、Γ をその境界とする．Ω 上の Sobolev 空間を $H^m(\Omega)$ とし、norm、semi-norm を各々 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$, $|\cdot|_{m,\Omega}$ で表わす．$L^2(\Omega)$ の norm を $|\cdot|_{0,\Omega}$、内積を $(\cdot\,,\cdot)$ で表わす．

次の移流拡散方程式

$$
\begin{cases}
-\nu \Delta u + (b\cdot\nabla)u = f & \text{in } \Omega, \quad (1.1)\\
u = u_0 & \text{on } \Gamma, \quad (1.2)
\end{cases}
$$

を考える．ただし、$f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H^1(\Omega)$, $b = b(x) = (b_1(x), \cdots, b_n(x))$ は十分滑らかであり、$\nu > 0$（定数）とする．（§6,7 では簡単のため、$u_0 = 0$ とする．）

(1.1)−(1.2) の変分定式化は次の通りである.

$$
(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} u - u_0 \in H_0^1(\Omega) & \text{かつ} \\ a(u, v) = (f, v) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}
$$

なる $u \in H^1(\Omega)$ を見出せ. ただし、

$$
(1.3) \qquad a(u, v) = \int_\Omega \{ \nu \nabla u \cdot \nabla v + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla u) v \} dx ,
$$

$$
(1.4) \qquad (f, v) = \int_\Omega f v \, dx
$$

である.

<u>補題 1.</u> $\sup_{x \in \Omega} \| \boldsymbol{b}(x) \| < \infty$ ($\| \cdot \|$ は Euclidean norm) ならば、$a(\cdot, \cdot)$ は $H_0^1(\Omega)$ 上で連続である. (i.e.)

$$
(1.5) \qquad {}^\exists M > 0 \quad \text{s.t} \quad |a(u, v)| \leq M |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \quad \square
$$

<u>補題 2.</u> $\mathrm{div}\, \boldsymbol{b} \leq 0$ ならば、$a(\cdot, \cdot)$ は $H_0^1(\Omega)$-elliptic である.
(i.e.)

$$
(1.6) \qquad a(u, u) \geq \nu |u|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) . \square
$$

従って、Lax-Milgram の定理から、(P) の解の存在と一意性を得る.

<u>定理 1.</u> $\sup_{x \in \Omega} \| \boldsymbol{b}(x) \| < \infty$ かつ $\mathrm{div}\, \boldsymbol{b} \leq 0$ ならば、(P) は一意解 u を持つ. $\square$

また、良く知られた結果として、(P) の解 u に対して、最大値原理が成立つ.

定理2.（最大値原理） $f \leq 0$ in Ω かつ（P）の解 u が $\overline{\Omega}$ で連続、Ω で2回連続微分可能ならば、

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \max_{x \in \Gamma} u_0(x) \tag{1.7}$$

が成立つ。□

2. 非適合一次要素

T_h を Ω の有限要素分割（$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$, K : n-simplex）とする。$1 \leq i \leq n+1$ に対して、A_i を K の頂点、K_i' を A_i を含まない K の $(n-1)$ 次元の面、B_i を K_i' の重心、λ_i を $x \in K$ の A_i $(1 \leq i \leq n+1)$ に関する重心座標、μ_i を $x \in K$ の B_i $(1 \leq i \leq n+1)$ に関する重心座標とする。

λ_i と μ_i の間には、次の関係があることに注意する。

$$\mu_i = 1 - n\lambda_i \qquad (1 \leq i \leq n+1). \tag{2.1}$$

従って、$\{B_i\}_{i=1}^{n+1}$ は $P_1(K)$-unisolvent であり、

$$u = \sum_{i=1}^{n+1} u(B_i)\mu_i \qquad \forall u \in P_1 \tag{2.2}$$

が成立つ。

すべての K_i' の重心 B_i の番号を付けなおして、

B_i $(1 \leq i \leq N)$: Ω の内部にある K_i' の重心

B_i $(N+1 \leq i \leq N+M)$: Γ 上の K_i' の重心

としておく。

有限要素空間を次の様に定義する。

(2.3) $V_h = \{ v_h \in L^2(\Omega) \mid$ (i) v_h は各 $K \in T_h$ 上で一次、

(ii) v_h は B_i ($1 \leq i \leq N+M$) で連続.$\}$

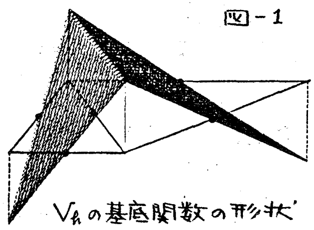
(2.4) $V_{0h} = \{ v_h \in V_h \mid v_h = 0 \quad \text{at} \quad B_i \ (N+1 \leq i \leq N+M) \}$.

$w_{ih} \in V_h$ を

(2.5) $$w_{ih}(B_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i, j \leq N+M$$

を満たすものとすると、$\{ w_{ih} \mid 1 \leq i \leq N+M \}$, $\{ w_{ih} \mid 1 \leq i \leq N \}$ は各々 V_h, V_{0h} の基底である。また、V_h, V_{0h} は各々 $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$ の一つの近似と考えられるが、隣接要素の面上で不連続であるから、$V_h \not\subset H^1(\Omega)$, $V_{0h} \not\subset H^1_0(\Omega)$ である.

図-1



V_h の基底関数の形状

従って、或る意味での整合条件が必要になる. 次の補題は、この要素が Patch Test をパスすることを意味する.

補題 3. (i)

(2.6) $$\int_{\partial K_1 \cap \partial K_2} (v_h|_{K_1} - v_h|_{K_2}) \, d\gamma = 0 \qquad \forall K_1, K_2 \in T_h, \ \forall v_h \in V_h.$$

(ii)

(2.7) $$\int_{\partial K \cap \Gamma} v_h|_K \, d\gamma = 0 \qquad \forall K \in T_h, \ \forall v_h \in V_{0h}. \qquad \Box$$

(証明) (2.1) から、

$$\int_{K_i'} \mu_j \, d\gamma = \int_{K_i'} d\gamma - n \int_{K_i'} \lambda_j \, d\gamma .$$

一方、

$$\int_{K_i'} \lambda_j \, d\gamma = \begin{cases} 0 & (i=j) \\ \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_{K_i'} d\gamma & (i \neq j) \end{cases}$$

であるから、

(2.8) $$\int_{K_i'} \mu_j \, d\gamma = \left(\int_{K_i'} d\gamma \right) \delta_{ij}$$ を得る.

$v_h \in V_h$、$\partial K_1 \cap \partial K_2 \neq \phi$ なる $K_1, K_2 \in T_h$ に対して、

$$\int_{\partial K_1 \cap \partial K_2} (v_h|_{K_1} - v_h|_{K_2})\, d\gamma$$

$$= \int_{\partial K_1 \cap \partial K_2} \Big(\sum_{k=1}^{n+1} v_h(B_{k,1})\mu_{k,1} - \sum_{k=1}^{n+1} v_h(B_{k,2})\mu_{k,2}\Big)\, d\gamma = (*)$$

が成立つ．ただし、$B_{k,1}$, $B_{k,2}$ $(1 \leq k \leq n+1)$ は各々 K_1, K_2 の $(n-1)$ 次元面の重心、$\mu_{k,1}$, $\mu_{k,2}$ $(1 \leq k \leq n+1)$ は各々 $x \in K_1$, $x \in K_2$ の $B_{k,1}$, $B_{k,2}$ $(1 \leq k \leq n+1)$ に関する重心座標とする．$\partial K_1 \cap \partial K_2$ の重心を B_i とすれば、(2.8) から、

$$(*) = v_h(B_i)\, meas(\partial K_1 \cap \partial K_2) - v_h(B_i)\, meas(\partial K_1 \cap \partial K_2) = 0$$

を得る．(2) は明らか．

3. 有限要素近似

bilinear form $a(\cdot,\cdot)$ の近似として、$a_h(\cdot,\cdot)$ を次の様に定義する．

(3.1) $$a_h(u_h, v_h) = a_h^1(u_h, v_h) + a_h^2(u_h, v_h),$$

ただし、

(3.2) $$\begin{cases} a_h^1(u_h, v_h) = \sum_{K \in T_h} \nu \int_K \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h \, dx, \\ a_h^2(u_h, v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K (b \cdot \nabla_h u_h) v_h \, dx, \end{cases}$$

$\nabla_h u_h = \nabla(u_h|_K)$ $\quad \forall K \in T_h$.

$H_0^1(\Omega)$ 上では、$\nabla_h \equiv \nabla$ であるから、

(3.3) $$a_h(u, v) = a(u, v) \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

であり、$a_h(\cdot,\cdot)$ は $V_{0h} + H_0^1(\Omega)$ 上で定義されている．V_h に次の semi-norm を与える．

(3.4) $$\|v_h\|_h = \Big(\sum_{K\in T_h} |v_h|_{1,K}^2\Big)^{1/2}.$$

補題4. $\|\cdot\|_h$ は V_{0h} 上の norm である。

(証明) $v_h \in V_{0h}$ を $\|v_h\|_h = 0$ となるものとする。$\|v_h\|_h$ の定義から、各 $K\in T_h$ 上で、

$$\frac{\partial v_h}{\partial x_i} = 0 \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

である。従って、v_h は各 $K\in T_h$ 上で定数である。ところが、補題3 (i) から、v_h は Ω 上定数であり、かつ補題3 (ii) から Γ 上で $v_h = 0$ である。よって、$v_h \equiv 0$ を得る。

また、$\|v\|_h = |v|_{1,\Omega}$ $\forall v\in H_0^1(\Omega)$、であるから、$\|\cdot\|_h$ も $V_{0h} + H_0^1(\Omega)$ 上で定義されている。

(P) の離散問題は、次の通りである。

$$(P_h)\qquad \begin{cases} u_h - u_{0h} \in V_{0h} \quad かつ \\ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h} \end{cases}$$

なる $u_h\in V_h$ を見出せ。ただし、u_{0h} は $u_{0h}(B_i) = u_0(B_i)$ ($N+1\leqq i\leqq N+M$) を満たす V_h の要素とする。

(P_h) の解の形は、

(3.5) $$u_h = \sum_{i=1}^{N} U_i\, w_{ih} + \sum_{i=N+1}^{N+M} G_i\, w_{ih},$$

(ただし、$U_i = u_h(B_i)$ $1\leqq i\leqq N$, $G_i = u_0(B_i)$ $N+1\leqq i\leqq N+M$)

であるから、(P_h) は次の連立一次方程式に帰着される。

$$(3.6)\qquad \begin{cases} A\mathbb{U} + A_1\mathbb{V} = \mathbb{F} , \\ \qquad\quad \mathbb{V} = \mathbb{G} , \end{cases}$$

ただし、

$$(3.7)\qquad \begin{cases} A = (a_{ij}) = (a_h(w_{jh}, w_{ih})) \quad 1 \leq i, j \leq N , \\ A_1 = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq N, \ N+1 \leq j \leq N+M , \\ \mathbb{U} = (U_j) \quad 1 \leq j \leq N , \quad \mathbb{V} = (U_j) \quad N+1 \leq j \leq N+M \\ \mathbb{G} = (G_j) \quad N+1 \leq j \leq N+M , \\ \mathbb{F} = (F_j) = (\sum_{k=1}^{N+M} f(B_k)(w_{kh}, w_{jh})) \quad 1 \leq j \leq N . \end{cases}$$

4. 離散最大値原理　適合一次要素の場合（Kikuchi [2]）と同様である。各 $K \in T_h$ に対して、次の量を定義しておく。

$$(4.1)\qquad \begin{cases} h_K \ : \ K\text{の直径}, \\ \rho_K \ : \ K\text{の内接球の直径の上限}, \\ \kappa_K \ : \ K\text{の最小垂線長}, \\ \lambda_K \ : \ K\text{の最大垂線長}, \\ \tilde{b}_K = \sup_{x \in K} \| \mathbb{b} \| \quad , \quad \tilde{b} = \max_{K \in T_h} \tilde{b}_K \\ h = \max_{K \in T_h} h_K , \\ \tau_K = \max_{i \neq j} \dfrac{[\mu_i, \mu_j]}{|||\mu_i|||\ |||\mu_j|||} , \end{cases}$$

ただし、$[\mu_i, \mu_j] = \nabla\mu_i \cdot \nabla\mu_j$, $|||\mu_i||| = [\mu_i, \mu_i]^{1/2}$.

定義 1.（Ciarlet - Raviart [3]）行列 $A_0 = (a_{ij})$ $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq N+M$ が、non-negative type であるとは、

$$(4.2)\qquad a_{ij} \leq 0 \qquad i \neq j \quad 1 \leq i \leq N , \ 1 \leq j \leq N+M \quad \text{かつ}$$

(4.3) $$\sum_{j=1}^{N+M} a_{ij} \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq N$$

が成立つ時に言う。

定義 2. (Fujii [4]) 有限要素分割の族 $\{T_h\}$ が strictly acute type であるとは、

(4.4) $$\tau_K \leq -\tau_0 \qquad \forall K \in T_h$$

となる T_h に独立な定数 $\tau_0 > 0$ が存在する時に言う。

補題 5. $\sigma_K = \max\limits_{i \neq j} \dfrac{[\lambda_i, \lambda_j]}{|||\lambda_i|||\,|||\lambda_j|||}$ とする時、各 $K \in T_h$ に対して、$\tau_K = \sigma_K$ である。□

補題 6. $\displaystyle\sum_{j=1}^{N+M} a_{ij} = 0 \qquad 1 \leq i \leq N$. □

(2.1) および $|||\mu_i||| = n|||\lambda_i||| \quad 1 \leq i \leq n+1$ に注意すれば、[2] の Lemma 2 から、次の補題を得る。

補題 7. (i) $\dfrac{n}{\lambda_K} \leq |||\mu_i||| \leq \dfrac{n}{\kappa_K} \qquad 1 \leq i \leq n+1,\quad K \in T_h,$

(ii) $\displaystyle\int_K |\mu_i|\, dx \leq \frac{(2n+1)\,\mathrm{meas}(K)}{n+1} \qquad 1 \leq i \leq n+1,\quad K \in T_h$. □

各 $K \in T_h$, $1 \leq i, j \leq n+1$ に対して、

(4.5) $$\begin{cases} \alpha_{ij}(K) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_K \frac{\partial \mu_j}{\partial x_k} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k}\, dx \\ \beta_{ij}(K) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_K b_k \frac{\partial \mu_j}{\partial x_k} \mu_i\, dx \\ A(K) = (\nu \alpha_{ij}(K) + \beta_{ij}(K)) \end{cases}$$

とおく。

補題 8. $\{T_h\}$ が strictly acute type ならば、

(i) $$\alpha_{ij}(K) \leq \frac{n^2 \tau_K \,\mathrm{meas}(K)}{\lambda_K^2} \qquad i \neq j$$

(ii) $$|\beta_{ij}(K)| \leq \frac{n(2n+1)\tilde{b}_K \,\mathrm{meas}(K)}{(n+1)\kappa_K}$$ が成立つ．□

(証明) (i) $\alpha_{ij}(K) = \mathrm{meas}(K)\,[\mu_j, \mu_i] \leq \mathrm{meas}(K)\,\tau_K |||\mu_j|||\cdot|||\mu_i|||$

であるから、補題 7 (i) より従う．

(ii) schwarz の不等式を使えば、

$$|\beta_{ij}(K)| \leq \int_K \|b\| \, |||\mu_j||| \, |\mu_i| \, dx \leq \tilde{b}_K |||\mu_j||| \int_K |\mu_i| \, dx$$

を得る．従って、補題 7 (ii) から従う．

補題 9. $\dfrac{\lambda_K^2}{\kappa_K} \leq -\dfrac{n(n+1)\nu\tau_K}{(2n+1)\tilde{b}_K}$ $\quad K \in T_h$ ならば、行列 A_0 は non-negative type である．□

また、$\{T_h\}$ が regular とすると、

(4.6) $$\min_{K \in T_h} \frac{\kappa_K}{h_K} \geq \gamma_2$$

なる定数 $\gamma_2 > 0$ が取れるから、

$$h_K \leq -\frac{n(n+1)\nu\tau_K\gamma_2}{(2n+1)\tilde{b}_K} \quad \text{ならば、} \quad \frac{\lambda_K^2}{\kappa_K} \leq -\frac{n(n+1)\nu\tau_K}{(2n+1)\tilde{b}_K}$$

であることを注意しておく．

定理 3.（離散最大値原理） $\{T_h\}$ が regular, strictly acute type，行列 A が正則、$h \leq \dfrac{n(n+1)\nu\tau_0\gamma_2}{(2n+1)\tilde{b}}$ かつ $\displaystyle\max_{1\leq i\leq N} F_i \leq 0$ ならば、(3.6) の解 U は次式を満たす．

(4.7) $$\max_{1\le i\le N} U_i \le \max\left(0,\ \max_{1\le i\le M} G_{N+i}\right). \qquad \square$$

(証明) (i) $\max_{1\le i\le N} F_i < 0$ の時を考える。$U_i = \max_{1\le j\le N} U_j$ とする。

$U_i \le 0$ の時は明らか。そこで、$U_i > 0$ とする。

$U_i > \max_{1\le i\le M} G_{N+i}$ $\left(= \max_{1\le i\le M} U_{N+i}\right)$ と仮定する。

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} U_j + \sum_{j=1}^{M} a_{i,N+j} U_{N+j} = F_i \qquad 1\le i\le N,$$

であるから、行列 A_0 が non-negative type であることを使えば、

$$a_{ii} U_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{N} (-a_{ij}) U_j + \sum_{j=1}^{M} (-a_{i,N+j}) U_{N+j} + F_i$$
$$\le -U_i \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{N+M} a_{ij} + F_i$$

が成立つ。従って、

$$0 > F_i \ge U_i \sum_{j=1}^{N+M} a_{ij} = U_i > 0$$

となって、矛盾である。

(ii) $\max_{1\le i\le N} F_i \le 0$ の時は、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\mathbb{F}_\varepsilon = (F_{\varepsilon i}) = (F_1-\varepsilon, \cdots, F_N-\varepsilon)^t$$

とおくと、$\max_{1\le i\le N} F_{\varepsilon i} < 0$ となり (i) のケースに帰着される。

$\mathbb{U}_\varepsilon = (U_{\varepsilon i})$ $1\le i\le N$ を次の連立一次方程式の解とする。

$$\begin{cases} A\mathbb{U} + A_1\mathbb{V} = \mathbb{F}_\varepsilon \\ \qquad\quad \mathbb{V} = \mathbb{G} \end{cases}$$

A が正則であるから、

$$\mathbb{U}_\varepsilon = A^{-1}(\mathbb{F}_\varepsilon - A_1\mathbb{V})$$

であり、(i) の結果から

$$\max_{1\le i\le N} U_{\varepsilon i} \le \max(0, \max_{1\le i\le M} G_{N+i})$$

が成立つ。さらに、$\varepsilon \to 0$ の時 $U_\varepsilon \to U$ であるから

$$\max_{1\le i\le N} U_i \le \max(0, \max_{1\le i\le M} G_{N+i})$$

を得る。

5. 行列 A の正則性

定理3では、A の正則性を仮定したが、これは離散問題 (P_h) の可解性に関連している。今節では (P_h) の可解性を調べる。

定義3. K' を $K\in T_h$ の $(n-1)$ 次元の面とし、P_k を n 変数 $x_1,\cdots x_n$ に関する k 次以下の多項式全体とする時、$M^0_{K'} : L^2(K') \longrightarrow P_0|_{K'}$ を

(5.1) $$M^0_{K'} v = \frac{1}{meas(K')} \int_{K'} v \, d\gamma$$

で定義する。□

次に、以下の議論でよく使う技巧的補題を述べる。

補題10. (Crouzeix - Raviart [1]) $\forall \phi, v \in H^1(K)$ に対して

(5.2) $$\left| \int_{K'} \phi(v - M^0_{K'} v)\, d\gamma \right| \le C\, \sigma(K)\, h_K |\phi|_{1,K} |v|_{1,K}$$

なる K に独立な定数 $C > 0$ が存在する。ただし、$\sigma(K) = h_K/\rho_K$。□

$a_h(\cdot,\cdot)$ は、補題1と同一の仮定のもとで、V_{0h} 上連続であり、また $V_{0h} + H^1_0(\Omega)$ 上で連続であることが容易に示せる。即ち、

(5.3) $\quad {}^\exists M > 0 \quad s.t \quad |a_h(u_h, v_h)| \le M \|u_h\|_h \|v_h\|_h \quad {}^\forall u_h, v_h \in V_{0h}.$

(5.4) $\quad {}^{\exists}\tilde{M} > 0 \quad s.t \quad |a_h(u,v)| \leq \tilde{M} \|u\|_h \|v\|_h \qquad {}^{\forall}u, v \in V_{0h} + H_0^1(\Omega).$

<u>補題11.</u> $\operatorname{div} \mathbb{b} \leq 0$ かつ h が十分小ならば、$a_h(\cdot,\cdot)$ は V_{0h}-elliptic である。(i.e.)

(5.5) $\quad {}^{\exists}\alpha > 0 \quad s.t \quad a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_h^2 \qquad {}^{\forall}v_h \in V_{0h}.$ □

(証明) ${}^{\forall}v_h \in V_{0h}$ に対して、各 $K \in T_h$ 上で Green の公式を使うと、

(5.6) $\quad a_h(v_h, v_h) = \nu \sum_{K\in T_h} |v_h|_{1,K}^2 + \frac{1}{2} \sum_{K\in T_h} \left(\int_{\partial K} v_h^2 (\mathbb{b}\cdot\mathbb{n})\, d\gamma - \int_K (\operatorname{div} \mathbb{b}) v_h^2\, dx \right).$

$\operatorname{div} \mathbb{b} \leq 0$ であるから、

(5.7) $\quad a_h(v_h, v_h) \geq \nu \|v_h\|_h^2 + \frac{1}{2} \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} v_h^2 (\mathbb{b}\cdot\mathbb{n})\, d\gamma$

が成立つ。

(5.8) $$\sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} v_h^2 (\mathbb{b}\cdot\mathbb{n})\, d\gamma$$
$$= \sum_{K\in T_h} \sum_{K'\subset\partial K} \int_{K'} v_h^2 (\mathbb{b} - \mathbb{b}(B))\cdot\mathbb{n}\, d\gamma + \sum_{K\in T_h} \sum_{K'\subset\partial K} \int_{K'} v_h^2\, \mathbb{b}(B)\cdot\mathbb{n}\, d\gamma$$

であるから、これを使って (5.7) の第2項を評価しよう。ただし、B は $K' \subset \partial K$ の重心である。

$$\sum_{K\in T_h} \sum_{K'\subset\partial K} \int_{K'} v_h^2\, \mathbb{b}(B)\cdot\mathbb{n}\, d\gamma = \sum_{K\in T_h} \sum_{K'\subset\partial K} \int_{K'} v_h (v_h - v_h(B))\, \mathbb{b}(B)\cdot\mathbb{n}\, d\gamma$$

であるから、補題10によって次の評価を得る。

(5.9) $$\left| \sum_{K\in T_h} \sum_{K'\subset\partial K} \int_{K'} v_h^2\, \mathbb{b}(B)\cdot\mathbb{n}\, d\gamma \right| \leq C_1 h \|v_h\|_h^2 .$$

一方、

$$\sum_{K\in T_h} \sum_{K'\subset\partial K} \int_{K'} v_h(B)^2 (\mathbb{b} - \mathbb{b}(B))\cdot\mathbb{n}\, d\gamma = 0$$

に注意すれば、(5.8) の第一項は次の様に書ける。

$$(5.10)\quad \sum_{K\in T_h}\sum_{K'\subset\partial K}\int_{K'} v_h^2(\mathbb{b}-\mathbb{b}(B))\cdot\mathbb{n}\,d\gamma$$
$$=\sum_{K\in T_h}\sum_{K'\subset\partial K}\int_{K'}(v_h-v_h(B))^2(\mathbb{b}-\mathbb{b}(B))\cdot\mathbb{n}\,d\gamma$$
$$+\sum_{K\in T_h}\sum_{K'\subset\partial K}\int_{K'}2(v_h-v_h(B))\,v_h(B)\,(\mathbb{b}-\mathbb{b}(B))\cdot\mathbb{n}\,d\gamma.$$

次の事実に注意すれば、

$$|v_h - v_h(B)| \leqslant h_K\|\nabla v_h\| \quad \text{on } K,$$
$$\|\mathbb{b}-\mathbb{b}(B)\| \leqslant C_2 h_K \quad \text{on } K,$$
$$\mathrm{meas}(K') \leqslant n\cdot \mathrm{meas}(K)/2\rho_K$$
$$\sqrt{\mathrm{meas}(K)}\sum_{i=1}^{n+1}|v_h(B_i)| \leqslant C_3|v_h|_{0,K}$$

(ただし、B_i $(1\leqslant i\leqslant n+1)$ は ∂K の $n+1$ 個の面 K' の重心)、次の評価を得る.

$$\sum_{K'\subset\partial K}\left|\int_{K'}(v_h-v_h(B))\,v_h(B)\,(\mathbb{b}-\mathbb{b}(B))\cdot\mathbb{n}\,d\gamma\right| \leqslant C_4 h_K^2|v_h|_{0,K}|v_h|_{1,K},$$
$$\sum_{K'\subset\partial K}\left|\int_{K'}(v_h-v_h(B))^2(\mathbb{b}-\mathbb{b}(B))\cdot\mathbb{n}\,d\gamma\right| \leqslant C_5 h_K^3|v_h|_{1,K}^2.$$

従って、これらの式をすべての $K\in T_h$ について加えると、

$$(5.11)\quad \left|\sum_{K\in T_h}\sum_{K'\subset\partial K}\int_{K'}(v_h-v_h(B))\,v_h(B)\,(\mathbb{b}-\mathbb{b}(B))\cdot\mathbb{n}\,d\gamma\right| \leqslant C_6 h^2\|v_h\|_h^2,$$
$$(5.12)\quad \left|\sum_{K\in T_h}\sum_{K'\subset\partial K}\int_{K'}(v_h-v_h(B))^2(\mathbb{b}-\mathbb{b}(B))\cdot\mathbb{n}\,d\gamma\right| \leqslant C_7 h^3\|v_h\|_h^2,$$

を得る. ただし、(5.11) では discrete Poincaré inequality を用いた. (5.10), (5.11), (5.12) より、h を十分小とすれば

$$(5.13)\quad \left|\sum_{K\in T_h}\sum_{K'\subset\partial K}\int_{K'} v_h^2(\mathbb{b}-\mathbb{b}(B))\cdot\mathbb{n}\,d\gamma\right| \leqslant C_8 h^2\|v_h\|_h^2$$

を得る. 従って、(5.7) と (5.13) により、h を十分小とすれば、

$$(5.14)\quad a_h(v_h, v_h) \geqslant (\nu - C_9 h)\|v_h\|_h^2 \qquad \forall v_h \in V_{0h},$$

$$(5.15)\quad \nu - C_9 h > 0$$

となる定数 $C_9 > 0$ が存在することがわかる.

定理4. $\sup_{x\in\Omega}\|b(x)\| < \infty$, $\mathrm{div}\, b \leqq 0$ かつ h が十分小ならば、離散問題 (P_h) は一意解 u_h をもつ. $\square$

近似解の誤差評価を得るには、$a_h(\cdot,\cdot)$ の uniformly $V_{0h}+H_0^1(\Omega)$-ellipticity が必要である. 以下では、$a_h(\cdot,\cdot)$ の uniformly $V_{0h}+H_0^1(\Omega)$-ellipticity を示す. 先ず、次の直交分解を考える.

(5.16) $$V_{0h} = (V_{0h}\cap H_0^1(\Omega)) \oplus (V_{0h}\cap H_0^1(\Omega))^{\perp} .$$

従って、

(5.17) $$V_{0h}+H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus (V_{0h}\cap H_0^1(\Omega))^{\perp}$$

である. (5.17) から、$v \in V_{0h} + H_0^1(\Omega)$ は次の様に一意分解される.

(5.18) $$v = v_h + v_0 \qquad v_h \in V_{0h},\ v_0 \in H_0^1(\Omega).$$

$\|\cdot\|_h$ に付随した内積を

$$(u, v)_{1,h} = \sum_{K\in T_h}\int_K \nabla_h u\cdot\nabla_h v\, dx$$

で表わせば、

$$(v_h, v_0)_{1,h} = 0 \qquad v_h \in V_{0h},\ v_0 \in H_0^1(\Omega)$$

であるから、$\forall v \in V_{0h} + H_0^1(\Omega)$ に対して、

(5.19) $$\begin{aligned} a_h(v,v) &= a_h(v_h,v_h) + a_h(v_0,v_0) \\ &\quad + a_h^2(v_h,v_0) + a_h^2(v_0,v_h) \end{aligned}$$

である.

補題12. ある定数 $C>0$ に対して、次の評価が成立つ.

(5.20) $$|a_h^2(v_h,v_0) + a_h^2(v_0,v_h)| \leqq C\,(h + \max_{x\in\Omega}|\mathrm{div}\, b|)\,(|v_0|_{1,\Omega}^2 + \|v_h\|_h^2). \square$$

(証明)　$a_h^2(v_h, v_0) + a_h^2(v_0, v_h) = \sum_{K\in T_h} \int_K \mathbb{b}\cdot\nabla_h(v_0 v_h)\,dx$ に注意して、各 $K\in T_h$ で Green の公式を使えば、

$$a_h^2(v_h, v_0) + a_h^2(v_0, v_h)$$
$$= \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(v_0 v_h)\mathbb{b}_n\,d\gamma - \sum_{K\in T_h}\int_K(\operatorname{div}\mathbb{b})v_0 v_h\,dx,$$

である。ただし $\mathbb{b}_n = \mathbb{b}\cdot\mathbb{n}$.

$$\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(v_0 v_h)\mathbb{b}_n\,d\gamma = \sum_{K\in T_h}\sum_{K'\subset\partial K}\int_{K'}(\mathbb{b}_n v_0 - \mathcal{M}_{K'}^0(\mathbb{b}_n v_0))\,v_h\,d\gamma$$

であり、ある定数 $\beta_0, \beta_1 > 0$ に対して、

$$|\mathbb{b}_n v_0|_{1,K} \leqslant \beta_0 |v_0|_{0,K} + \beta_1 |v_0|_{1,K}$$

が容易に示せるから、補題10より

$$\left|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(v_0 v_h)\mathbb{b}_n\,d\gamma\right| \leqslant C_{10}\,h\,|v_0|_{1,\Omega}\|v_h\|_h. \tag{5.21}$$

一方、Schwarz の不等式から、

$$\left|\sum_{K\in T_h}\int_K(\operatorname{div}\mathbb{b})v_0 v_h\,dx\right| \leqslant \max_{x\in\Omega}|\operatorname{div}\mathbb{b}|\cdot|v_0|_{0,\Omega}|v_h|_{0,\Omega}$$

を得る。従って、Poincaré inequality および discrete Poincaré inequality から

$$\left|\sum_{K\in T_h}\int_K(\operatorname{div}\mathbb{b})v_0 v_h\,dx\right| \leqslant C_{11}\max_{x\in\Omega}|\operatorname{div}\mathbb{b}|\,|v_0|_{1,\Omega}\|v_h\|_h \tag{5.22}$$

を得る。よって、(5.21) と (5.22) から (5.20) が従う。

<u>定理5.</u>　$\operatorname{div}\mathbb{b}\leqslant 0$, $|\operatorname{div}\mathbb{b}|$ が十分小であり、かつ h が十分小であれば、$a_h(\cdot,\cdot)$ は uniformly $V_{0h}+H_0^1(\Omega)$-elliptic である。□

(証明)　(5.19), 補題2, 11, 12 から

$$a_h(v,v) \geqslant \nu|v_0|_{1,\Omega}^2 + \alpha\|v_h\|_h^2 - C(h + \max_{x\in\Omega}|\operatorname{div}\mathbb{b}|)(|v_0|_{1,\Omega}^2 + \|v_h\|_h^2)$$

$$\geqq \frac{\nu}{2}|v_0|^2_{1,\Omega} + \frac{\alpha}{2}\|v_h\|_h^2 + \left\{\frac{\nu}{2} - C(h + \max_{x\in\Omega}|\mathrm{div}\,\mathbb{b}|)\right\}|v_0|^2_{1,\Omega}$$
$$+\left\{\frac{\alpha}{2} - C(h + \max_{x\in\Omega}|\mathrm{div}\,\mathbb{b}|\right\}\|v_h\|_h^2$$

と評価できる．従って、$\frac{\nu}{2} - C(h + \max_{x\in\Omega}|\mathrm{div}\,\mathbb{b}|) > 0$ かつ $\frac{\alpha}{2} - C(h + \max_{x\in\Omega}|\mathrm{div}\,\mathbb{b}|) > 0$ となる様に h, $|\mathrm{div}\,\mathbb{b}|$ を十分小さく取れば、

$$a_h(v, v) \geqq \alpha'(|v_0|^2_{1,\Omega} + \|v_h\|_h^2)$$

となる定数 $\alpha' > 0$ が存在する．

$^\forall v_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対して、$|v_0|_{1,\Omega} = \|v_0\|_h$ であるから、$^\forall v \in V_{0h} + H_0^1(\Omega)$ に対して、

$$a_h(v, v) \geqq \alpha'(\|v_0\|_h^2 + \|v_h\|_h^2) \geqq \frac{\alpha'}{2}\|v_0 + v_h\|_h^2 = \tilde{\alpha}\|v\|_h^2$$

が成立つ．

6. エネルギー評価

今節および次節では、簡単のため $u_0 = 0$ とする．即ち、解くべき問題は次の (P_0) である．

(P_0) $\qquad a(u, v) = (f, v) \qquad {}^\forall v \in H_0^1(\Omega)$

なる $u \in H_0^1(\Omega)$ を見出せ．

$\Pi_K \in \mathcal{L}(H^1(K), P_1)$ を次式で定義する．

(6.1) $\qquad \int_{K'} \Pi_K v \, d\gamma = \int_{K'} v \, d\gamma \qquad K' \subset \partial K$.

$\Pi_K v(B_i)$ $\;1 \leqq i \leqq n+1\;$ は

$$\Pi_K v(B_i) = \int_{K'} v \, d\gamma \Big/ \mathrm{meas}(K'),$$

(ただし、B_i は $K' \subset \partial K$ の重心）で決まるから、Π_K は一意である．

$v \in P_1$ に対して、$\Pi_K v = v$ であるから、標準的な議論から

(6.2) $$|v - \Pi_K v|_{1,K} \leq C\sigma(K) h_K |v|_{2,K} \qquad \forall v \in H^2(K)$$

が示せる。ただし $\sigma(K) = h_K/\rho_K$.

(6.3) $$\Pi_h v|_K = \Pi_K v|_K \qquad \forall K \in T_h,\ \forall v \in H^1(\Omega)$$

によって、Π_h を定義すると、$\Pi_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); V_h) \cap \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); V_{0h})$

である。従って、$u \in H^2(\Omega)$ に対して

(6.4) $$\inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|_h \leq \|u - \Pi_h u\|_h = \Big(\sum_{K \in T_h} |u - \Pi_K u|_{1,K}^2\Big)^{1/2} \leq C_1 h |u|_{2,\Omega}$$

が成立つ。一方、定理5から Strang の補題が成立つ。即ち、

(6.5) $$\|u - u_h\|_h \leq C\Big(\inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_{0h}} \frac{|a_h(u, w_h) - (f, w_h)|}{\|w_h\|_h}\Big)$$

<u>補題13.</u> $D_h(u, w_h) = a_h(u, w_h) - (f, w_h)$ とする。このとき、$u \in H^2(\Omega)$ ならば、ある定数 $C > 0$ に対して、

(6.6) $$|D_h(u, w_h)| \leq C h |u|_{2,\Omega} \|w_h\|_h$$

が成立つ。

(証明) $$D_h(u, w_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K (\nu \nabla_h u \cdot \nabla_h w_h + (b \cdot \nabla_h u) w_h)\, dx$$
$$- \sum_{K \in T_h} \int_K (-\nu \Delta u + (b \cdot \nabla u)) w_h\, dx$$

であるから、各 $K \in T_h$ 上で Green の公式を使えば、

(6.7) $$D_h(u, w_h) = \nu \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} w_h \, d\ell$$

である。

$K' = \partial K_1 \cap \partial K_2 \neq \phi$ $(K_1, K_2 \in T_h)$ に対して、$D_h(u, w_h)$ の K' 上の影響は、

$$\int_{K'} \left(\frac{\partial u}{\partial n_1} w_h|_{K_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2} w_h|_{K_2}\right) d\gamma = \int_{K'} \frac{\partial u}{\partial n_1}(w_h|_{K_1} - w_h|_{K_2})\, d\gamma$$

である．ただし n_i は ∂K_i 上の外向き単位法線ベクトルである（$i=1,2$）．補題3(i)から，

$$\int_{K'} M^0_{K'}\left(\frac{\partial u}{\partial n_1}\right)(w_h|_{K_1} - w_h|_{K_2})\, d\gamma = 0$$

が成立つから，

$$\int_{K'} \left(\frac{\partial u}{\partial n_1} w_h|_{K_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2} w_h|_{K_2}\right) d\gamma$$

$$= \int_{K'} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial n_1} - M^0_{K'}\left(\frac{\partial u}{\partial n_1}\right)\right) w_h|_{K_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial n_2} - M^0_{K'}\left(\frac{\partial u}{\partial n_2}\right)\right) w_h|_{K_2}\right\} d\gamma$$

と書ける．また，補題3(ii)から

$$\int_{K'\cap\Gamma} M^0_{K'}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) w_h\, d\gamma = 0$$

であるから，

$$(6.8) \qquad \int_{K'} \frac{\partial u}{\partial n} w_h\, d\gamma = \int_{K'} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - M^0_{K'}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right) w_h\, d\gamma$$

を得る．従って，(6.8)と補題10から，(6.6)を得る．

<u>定理6.</u> $\{T_h\}$ が regular，$\sup_{x\in\Omega} \|b(x)\| < \infty$，$\mathrm{div}\, b \leq 0$，$|\mathrm{div}\, b|$ が十分小かつ h が十分小とする．この時，$u \in H^2(\Omega)$ ならば，

$$(6.9) \qquad \|u - u_h\|_h \leq C h |u|_{2,\Omega}$$

なる h に依存しない定数 $C > 0$ が存在する．□

<u>7. L^2-評価</u>　　今節では，Aubin-Nitsche の補題を使って，$|u - u_h|_{0,\Omega}$ を評価する．

最初に，(P_0) の Adjoint 問題

$$(7.1)\begin{cases}\text{与えられた } g\in L^2(\Omega) \text{ に対して、}\\ \qquad a(v,\psi)=(g,v) \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)\\ \text{なる } \psi\in H_0^1(\Omega) \text{ を見出せ，}\end{cases}$$

を考える．

定義 4. adjoint 問題(7.1) が regular であるとは、次の2条件が成立つ時に言う．

$$(7.2)\quad\begin{cases}(i)\quad \psi\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\\ (ii)\quad \|\psi\|_{2,\Omega}\leqslant C^*|g|_{0,\Omega}\end{cases}.\ \square$$

$A\in\mathcal{L}(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega);\ L^2(\Omega))$ を

$$(7.3)\qquad Av=-\nu\Delta v+(\mathbb{b}\cdot\nabla)v$$

で定義する．A の adjoint operator A^* は

$$(7.4)\qquad (Av,\psi)=(v,A^*\psi)$$

（ただし、$v\in D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$，$\psi\in D(A^*)$）で定義されるから、簡単な計算により

$$(7.5)\qquad g=A^*\psi=-\nu\Delta\psi-(\mathbb{b}\cdot\nabla)\psi-\psi\,\mathrm{div}\,\mathbb{b}$$

である．

定理 7. adjoint 問題 (7.1) が regular，$\{T_h\}$ が regular，$\sup_{x\in\Omega}\|\mathbb{b}(x)\|<\infty$，$\mathrm{div}\,\mathbb{b}\leqslant 0$，$|\mathrm{div}\,\mathbb{b}|$ が十分小 かつ h が十分小とする．この時 $u\in H^2(\Omega)$ ならば、

$$(7.6)\qquad |u-u_h|_{0,\Omega}\leqslant Ch^2|u|_{2,\Omega}$$

となる h に依存しない定数 $C>0$ が存在する．$\square$

(証明)　$|u-u_h|_{0,\Omega}$ は次式で性格付けられる．

(7.7)　$$|u-u_h|_{0,\Omega}=\sup_{g\in L^2(\Omega)}\frac{|(u-u_h,g)|}{|g|_{0,\Omega}}\ .$$

$\forall\psi_h\in V_{0h}$ に対して，

(7.8)　$$(u-u_h,g)=a_h(u-u_h,\psi-\psi_h)+a_h(u-u_h,\psi_h)+a_h(u_h,\psi)-(u_h,-\nu\Delta\psi-\operatorname{div}(\psi\mathbb{b}))$$

が成立つ．(1.1) および発散定理から，

(7.9)　$$\begin{aligned}a_h(u-u_h,\psi_h)&=\nu\sum_{K\in T_h}\int_K(\nabla_h u\cdot\nabla_h\psi_h+\psi_h\Delta u)\,dx\\&=\nu\sum_{K\in T_h}\int_K\operatorname{div}(\psi_h\nabla u)\,dx\\&=\nu\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\psi_h\frac{\partial u}{\partial n}\,d\gamma\end{aligned}$$

を得る．また，$\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\psi\frac{\partial u}{\partial n}\,d\gamma=0$　および補題3から

$$a_h(u-u_h,\psi_h)=\sum_{K\in T_h}\sum_{K'\subset\partial K}\int_{K'}(\psi_h-\psi)\left(\frac{\partial u}{\partial n}-M^0_{K'}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right)d\gamma$$

となり，補題10から次の評価を得る．

(7.10)　$$|a_h(u-u_h,\psi_h)|\leq C_0h|u|_{2,\Omega}\|\psi-\psi_h\|_h\ .$$

一方，

(7.11)　$$\begin{aligned}&a_h(u_h,\psi)-(u_h,-\nu\Delta\psi-\operatorname{div}(\psi\mathbb{b}))\\&=\sum_{K\in T_h}\int_K\operatorname{div}(\nu u_h\nabla_h\psi+u_h\psi\mathbb{b})\,dx\\&=\nu\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}u_h\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\gamma+\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}u_h\psi(\mathbb{b}\cdot n)\,d\gamma\end{aligned}$$

と変形できる．(7.11) の第一項は (7.10) と同様に評価できる．

(7.12)　$$\left|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}u_h\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\gamma\right|\leq C_1h\|u_h-u\|_h|\psi|_{2,\Omega}\ .$$

また，(7.11) の第2項は，

$$\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} u_h \psi (b\cdot n)\, d\gamma$$
$$=\sum_{K\in T_h}\sum_{K'\subset\partial K}\int_{K'}(u_h-u)\{\psi b\cdot n - M^0_{K'}(\psi b\cdot n)\}\, d\gamma$$

と変形できるから、再び補題10から

(7.13) $$\left|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K} u_h\psi(b\cdot n)\,d\gamma\right| \leq C_2 h \|u_h-u\|_h |\psi|_{2,\Omega}$$

を得る．従って、$a_h(\cdot,\cdot)$ の $V_{0h}+H_0^1(\Omega)$ 上の連続性および (7.10) (7.12), (7.13) から、次式を得る．

(7.14) $$|u-u_h| \leq \tilde{M}\|u-u_h\|_h\|\psi-\psi_h\|_h + C_0 h|u|_{2,\Omega}\|\psi-\psi_h\|_h + C_3 h\|u_h-u\|_h|\psi|_{2,\Omega}$$

また、adjoint 問題の近似解のエネルギー評価として、

(7.15) $$\|\psi-\psi_h\|_h \leq C_4 h |\psi|_{2,\Omega}$$

を得ることができ、adjoint 問題の regularity から

(7.16) $$|\psi|_{2,\Omega} < \|\psi\|_{2,\Omega} \leq C^*|g|_{0,\Omega}$$

が成立つ．従って、(7.14), (7.15), (7.16) および定理6から、(7.6) を得る．

謝辞　この研究を進めるにあたって、御指導、御教示をいただいた電気通信大学 情報数理工学科 牛島照夫先生に深く感謝いたします．

REFERENCES

[1] M. Crouzeix and P.A. Raviart, Conforming and nonconforming finite element

methods for solving the stationary Stokes equations I, R.A.I.R.O. Numer. Anal., 7(1973), 33 - 76.

[2] F. Kikuchi, Discrete maximum principle and artificial viscosity in finite element approximations to convective diffusion equations, ISAS REPORT, 550 (1977).

[3] P.G. Ciarlet and P.A. Raviart, Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 2(1973), 17 - 31.

[4] H. Fujii, Some remarks on finite element analysis of time-dependent field problems, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, edited by Y. Yamada and R.H. Gallagher, University of Tokyo Press (1973), 91 - 106.