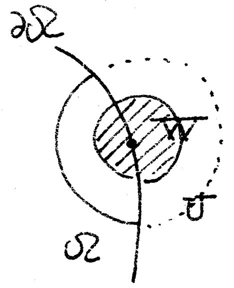
数理解析研究所講究録
第431巻 1981年 36-49

Cauchy-Riemann 多様体上の代数解析
― 偏微分方程式系の正則解の解析接続 ―

東大・理　田島慎一

我々は、複素多様体 X 上の偏微分方程式系 $\mathcal{M}$ の正則解の解析接続の問題をここで扱います。Ω が X の open set で境界 $\partial\Omega$ は（実解析的）実超曲面とします。一つの未知函数 u と一つの偏微分作用素 P に対しては、次の問題を考えていることになります。



一点 $p_0 \in \partial\Omega$ の近傍 U において

$$\begin{cases} u \in \mathcal{O}(\Omega \cap U) \\ Pu = 0 \quad \text{on} \quad \Omega \cap U \end{cases}$$

をみたす u が与えられたとき、u は P の正則解として（p_0 の近傍で）$\partial\Omega$ を越えて、解析接続できるか否か。

Zerner [11] は、境界面が作用素 P に対して非特性的

ならば、上記の解析接続は常に可能であることを示しました。

この結果は、Bony-Schapira[2]によって、佐藤先生の基本定理の別証明に応用されました。又、hyperbolic方程式のCauchy問題がhyperfunctionのcategoryでは常に解けることの証明においても、複素領域における解析接続の実行が本質的でありました。

一般の方程式系 $\mathcal{M}$ の"正則解"の非特性面に対する解析接続については、柏原先生の講義録[3]において(詳しい証明付きで)解明されております。

他方、境界面が方程式に対して特性的な場合は、津野先生が[9]〜[10]等において御研究されております。P. Pallu de la Barrière[6]は、単独方程式(非退化な)の正則解の解析接続の問題が、境界面上のある種の擬方程式系のmicro-function解の消滅の問題と同値であることを示しました。

我々は、P. Pallu de la Barrièreの結果を2つの方向で拡張します。

(1) 一般の線型偏微分方程式系の"正則解"を扱う。

(2) 実超曲面 $\partial\Omega$ に対する解析接続だけでなく、複素多様体 X の generic な部分多様体 N に対する解析接続を考える。

Generic な部分多様体と Cauchy-Riemann 多様体とは同一視できるから、主な結果（定理 9 ）を大雑把な言葉で、標語的に表現すれば

偏微分方程式系 $\mathcal{M}$ の正則解の解析接続の障碍

‖

C-R 多様体上の方程式系 $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ の microfunction 解

となります。この結果は、相原－河合先生の楕円型方程式系の境界値問題の御研究〔5〕と密接な関係があります。実際我々の結果は、generic な部分多様体に対する境界値問題と理解すれば、相原－河合先生の御結果を精密化したものと考えられます。

§.1. 接続問題の microlocal な解釈

記号：$\mathcal{D}_X$ により X 上の正則函数を係数とする正則な偏微分作用素全体からなる層の作る環を表わしましょう。更に

$\mathcal{M}$ ： coherent $\mathcal{D}_X$-module 。

$\mathcal{O}_X$ ： X 上の正則函数のなす層

Ω ： X の open set 。 $j: \Omega \hookrightarrow X$ ：自然なうめこみ。

$F = X - \Omega$。 $\partial\Omega = N$。 $p_0 \in N$。

N_+ : $\partial\Omega$における外向きの余接方向 in S_N^*X。

π : $(X - N) \sqcup S_N^*X \to X$ 自然な射影。

方程式系 $\mathcal{M}$ の正則解の層 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ を $\mathcal{F}$ とおけば

$$0 \to \mathcal{H}_F^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(j^{-1}\mathcal{F}) \to \mathcal{H}_F^1(\mathcal{F}) \to 0 \quad \text{完全}$$

$$0 \to R^k j_*(j^{-1}\mathcal{F}) \to \mathcal{H}_F^{k+1}(\mathcal{F}) \to 0 \quad \text{完全}$$

を得ます。解析接続の一意性により $\mathcal{H}_F^0(\mathcal{F})|_N = 0$ が成立するから. N 上で次を得ます。

$$0 \to \mathcal{F}|_N \to j_*(j^{-1}\mathcal{F})|_N \to \mathcal{H}_F^1(\mathcal{F})|_N \to 0 \quad \text{完全}$$

$$0 \to R^k j_*(j^{-1}\mathcal{F}) \to \mathcal{H}_F^{k+1}(\mathcal{F}) \to 0 \quad k \geq 1,\ \text{完全}$$

他方. comonoidal transformation を使えば

$$\pi_*\{\mathcal{H}^k_{S_N^*X}(\pi^{-1}\mathcal{F})^a|_{N_+}\} = \mathcal{H}_F^k(\mathcal{F})|_N$$

が成りたつことがわかるので p_0 の近傍における Ω 上の正則解 $j_*(j^{-1}\mathcal{F})_{p_0}$ が $\partial\Omega$ を越えて $\mathcal{F}_{p_0}$ の section に接続できる必要充分条件は

$$\mathcal{H}_F^1(\mathcal{F})|_N = \pi_*\{\mathcal{H}^1_{S_N^*X}(\pi^{-1}\mathcal{F})^a|_{N_+}\}$$

が消滅することにほかなりません。

方程式系に対しては，正則解 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ のみでなく $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ も同時に扱った方がより自然なので，以後方程式系 $\mathcal{M}$ の（derived category における）正則解として $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ を考えます。N を複素多様体 X の部分多様体とし，π を $(X-N) \sqcup S_N^*X$ から X への射影とすれば一般化された正則解の解析接続の obstruction は

$$\mathbb{R}\Gamma_{S_N^*X}(\pi^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)^a)$$

と理解するのが自然です。（S-K-K. Chap I. Prop. 1.2.3）

以後，我々は，擬方程式系の理論を使って，

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_N$$
$$\mathbb{R}\Gamma_N\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$
$$\mathbb{R}\Gamma_{S_N^*X}(\pi^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)^a)$$

を計算することを目標とします。この際，部分多様体 N が generic という条件が，必然的であり，しかも証明，結果，応用すべてにわたって重要な役割をはたしていることを，あらかじめ注意しておきたいと思います。

§2. 主定理の紹介

複素多様体 X を実解析的多様体とみなしたものを $X_{\mathbb{R}}$ とします。X は $X_{\mathbb{R}}$ 上に Cauchy-Riemann 方程式系 $\bar{\partial} u = 0$ をつけ加えたものと理解できます。このことを方程式系の言葉で表現してみましょう。

複素多様体 X 上の自明な方程式系 $\mathcal{D}_X$ を考えれば、明らかに

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X$$

を得ます。他方、実多様体 $X_{\mathbb{R}}$ の複素化を $X_{\mathbb{C}}$ で表わせば、$X_{\mathbb{R}}$ 上の Cauchy-Riemann 方程式系は（$\mathcal{D}_{C\text{-}R}$ で表わす）coherent $\mathcal{D}_{X_{\mathbb{C}}}$-module と理解され、しかも

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{C}}}}(\mathcal{D}_{C\text{-}R}, \mathcal{B}_{X_{\mathbb{R}}}) = \mathcal{O}_X$$

がなりたちます。ここに $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{R}}}$ は実多様体 $X_{\mathbb{R}}$ 上の超函数のなす层としました。

今、$\overline{X}$ により X の複素共役空間を表わすとし、$X_{\mathbb{R}}$ を $X \times \overline{X}$ の対角線集合と同一視すれば、$X \times \overline{X}$ は $X_{\mathbb{R}}$ の複素化となります。τ を $X \times \overline{X}$ から X への自然な射影とすれば

$$\mathcal{D}_{C\text{-}R} = \tau^*(\mathcal{D}_X) = \mathcal{D}_{X \times \overline{X} \to X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X$$

がなりたちます。そこで

定義1. Coherent $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ に対して

$$\mathcal{M}_{C-R} \overset{def}{=} \tau^* \mathcal{M} = \mathcal{D}_{X\times\overline{X}\to X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$$

とおく。

命題2. (柏原)

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X\times\overline{X}}}(\mathcal{M}_{C-R}, B_{X_{\mathbb{R}}}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X).$$

がなりたつので 複素多様体 X 上の方程式系 $\mathcal{M}$ の正則解の問題は、方程式系 $\mathcal{M}_{C-R}$ を導入することによって 実多様体 $X_{\mathbb{R}}$ 上の超函数解の問題に帰着されるわけです。

まず、Cauchy-Riemann系 $\mathcal{D}_{C-R}$ に対して非特性的な部分多様体 N を特徴付けましょう。

$\dim_{\mathbb{C}} X = m$, $\dim_{\mathbb{R}} N = n$ とおきます。複素多様体 X の実部分多様体 N が局所的に、実数値をとる実解析的函数 $f_1, f_2, \cdots, f_{2m-n}$ に依って

$$N = \{ f_1 = f_2 = \cdots = f_{2m-n} = 0 \}$$
$$df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_{2m-n} \neq 0 \quad \text{on } N$$

で与えられているとき

定義3. N が X の generic な部分多様体とは、次の条件

がみたされることをいう。

$$\partial f_1 \wedge \partial f_2 \wedge \cdots \wedge \partial f_{2m-n} \neq 0 \quad \text{on } N$$

特に全ての実超曲面は generic です。又 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^{m-k}$ は $\mathbb{C}^m$ で generic です。逆に、真の複素部分多様体はけして generic になりません。

部分多様体 N の $X \times \overline{X}$ 内での複素化を Y とすれば、次の定理を得ます。

<u>定理4.</u> Y が Cauchy-Riemann 系 $\mathcal{D}_{C-R}$ に対して(N の近傍で) S-K-K の意味で非特性的な必要充分条件は、N が X の generic 部分多様体となることである。

<u>系5.</u> $\mathcal{M}$ を任意の coherent $\mathcal{D}_X$-module とする。すると Y は方程式系 $\mathcal{M}_{C-R}$ に対して(N の近傍で) S-K-K の意味で非特性的である。

<u>系6.</u> $\mathcal{M}_{C-R}$ の Y への接方程式系を $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ で表わせば

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{B}_N)[-\mathrm{codim}_X N] = \mathbb{R}\Gamma_N \, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \otimes \omega_{N|X}$$

が成立します。

さて、我々の目的は、系6の結果を microlocal 化することにあったわけです。その為には、方程式系 $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ を別の角度から理解しなおすことが大切になります。

G. Tomassini [8] や A. Andreotti – G. A. Fredricks [1] によって示された結果より次を得ます。

<u>命題7.</u> N が X の generic な部分多様体で、Y は $X\times\overline{X}$ における N の複素化とします。

$\varphi_{\mathbb{C}}$ を Y の $X\times\overline{X}$ へのうめこみとし、τ を $X\times\overline{X}$ から X への射影とすれば $\varphi=\tau\circ\varphi_{\mathbb{C}}$ は N に制限すれば N の X へのうめこみと一致し、しかも $\varphi: Y\to X$ は <u>submersion</u> である。

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{C}}"] & X\times\overline{X} \arrow[d, "\tau"] \\ N \arrow[u] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

この結果は我々にとって非常に重要で、次の命題が直ちに得られます。

<u>命題8.</u> $\mathcal{M}$ を coherent $\mathcal{D}_X$-module とする。次がなりたつ。（generic 部分多様体 N に対しては）

(1) $\mathcal{M}_{(-R|Y} = \varphi^* \mathcal{M}$

(2) $SS(\mathcal{M}_{(-R|Y}) = \varphi^*(SS(\mathcal{M})) = SS(\mathcal{M}) \underset{X}{\times} Y$

(3) $SS(\mathcal{M}_{(-R|Y}) \cap T_N^* Y = \varphi^*(SS(\mathcal{M}) \cap T_N^* X)$

次の主定理も $\varphi : Y \to X$ が submersion であることから導びかれます。

<u>主定理 9</u>　$\mathcal{M}$ を複素多様体 X 上の coherent $\mathcal{D}_X$-module, N を X の generic 部分多様体. Y は N の $X \times \overline{X}$ における複素化とする。このとき次の quasi-isomorphisms が成立する。

(1). $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{(-R|Y}, A_N) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_N$

(2) $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{(-R|Y}, B_N)[-\mathrm{codim}_X N]$

$$= \mathbb{R}\Gamma_N \, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \otimes \omega_{N|X}$$

(3) $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_{(-R|Y}, C_N)[-\mathrm{codim}_X N]$

$$= \mathbb{R}\Gamma_{S_N^* X}(\pi_{N|X}^{-1} \, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)^a) \otimes \omega_{N|X}$$

ただし. A_N, B_N, C_N はそれぞれ N 上の実解析函数, hyperfunction, そして. $S_N^* Y$ 上の microfunction のなす層を表わします。

§3 主定理の意味

この節では、いくつかの例を述べて、主定理の意味を明らかにしたく思います。

まず、複素多様体 X が実部分多様体 M の複素化の場合を考えます。すべての coherent $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}_{\mathbb{C}\text{-}\mathbb{R}|X} = \mathcal{M}$ が成立するので

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_M) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_M$$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M) = \mathbb{R}\Gamma_M \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M|X}[m]$$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M) = \mathbb{R}\Gamma_{S_M^*X}(\pi^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)^a) \otimes \omega_{M|X}[m]$$

を再発見します。実領域 M における"解析"が複素領域 X における、M に対する解析接続の問題と同値であることを、これらの式は示しています。これは S-K-K の基本的思想の一つにほかなりません。柏原-河合先生も [ ] で注意されておりますが、ここで $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X$ とおけば

$$\mathcal{A}_M = \mathcal{O}_X|_M$$

$$\mathcal{B}_M = \mathbb{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M|X}[\dim M]$$

$$\mathcal{C}_M = \mathbb{R}\Gamma_{S_M^*X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)^a \otimes \omega_{M|X}[\dim M]$$

となり、$\mathcal{A}_M, \mathcal{B}_M, \mathcal{C}_M$ の定義を再び得るわけです。

さて今度は、部分多様体 N は一般の generic な部分多様体とし、方程式系 $\mathcal{M}$ が自明な場合，つまり $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X$ のときを考えましょう。

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{C\text{-}R|Y}, A_N) = \mathcal{O}_X|_N$$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{C\text{-}R|Y}, B_N) = \mathbb{R}\Gamma_N(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{N|X}[+\operatorname{codim} N]$$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{D}_{C\text{-}R|Y}, C_N) = \mathbb{R}\Gamma_{S^*_N X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)^a \otimes \omega_{N|X}[+\operatorname{codim} N]$$

となります。$\mathcal{D}_{C\text{-}R|Y}$ は接 Cauchy-Riemann 方程式系にほかなりません。

上記の結果を方程式系 $\mathcal{M}$ に拡張したのが、主定理の意味するところと理解できます。

以上のことより，複素多様体 X の上に方程式系 $\mathcal{M}$ が与えられたとき

(1) 実領域 M 上で $\mathcal{M}$ の"解"を決定する問題。

や

(2) $\mathcal{M}$ の正則解の実超曲面に対する古典的解析接続の問題。

が本質的に同じ type の問題であることが明らかにされたと思います。

実際、代数解析の非常に多くの重要な結果が、複素領域における正則解の解析接続の研究から得られています。逆に考えて，正則解の解析接続という古典的問題を，実領域における解析の助けをかりて研究することも可能です。

証明，応用等については［7］を御覧ください。

1. Andreotti, A et G.A. Fredricks : Embeddability of real analytic Cauchy-Riemann manifold; Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 6 (1979) pp. 285-304.

2. Bony, J.M. et P. Schapira: Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, Inventiones Math., 17 (1972) pp. 95-105

3. 柏原正樹 : Systèmes d'équations micro-différentielles. Univ. Paris-Nord. (1978).

4. Kashiwara, M. et T. Kawai : On the boundary value problem for elliptic systems of linear differential operators. I. II. Proc. Japan. Acad. 48 (1972), pp. 712-715, ibid 49 (1973), pp. 164-168.

5. 柏原正樹，河合隆裕 : 楕円型境界値問題の理論とその応用．数理科学講究録 238 (1975) pp. 1-59

6. Pallu de la Barrière. P. : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, J. Math. Pures et Appl. 55 (1976) pp. 21–46.

7. Tajima. S : Analyse microlocale sur les variétés de Cauchy-Riemann et problèmes du prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. à paraître.

8. Tomassini. G : Tracce delle funzioni olomorfe sulle sotto-varietà analitiche reali d'una varietà complessa. Ann. Scuola Norm. Sup Pisa 20 (1966) pp. 31–43.

9. Tsuno. Y : On the continuations of holomorphic solutions of characteristic differential equations. J. Math. Soc Japan. 26 (1974). pp. 523–548.

10. Tsuno. Y : Holomorphic continuation of solutions of partial differential equations across the multiple characteristic surface. J. Math. Soc. Japan 32 (1980), pp. 285–299

11. Zerner. M : Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci. Paris. 272 (1971), pp. 1646–1648