数理解析研究所講究録
第431巻 1981年 178-191

多項式の複素巾の積分が満たすある差分微分方程式系

上智大 理工　野海正俊

0. $f=f(t,x)$ をパラメータ t を含む x の多項式とし，その複素巾 f^{λ} の積分 $u(\lambda,t)=\int_{C(t)} f(t,x)^{\lambda}dx$ を考えると，$u(\lambda,t)$ は，積分に対する適当な条件（部分積分及びパラメータに関する積分記号下の微分が許されること）の下で，λ に関する差分・t に関する微分方程式を満たす。（差分微分方程式の一般的な存在証明が，I. N. Bernstein [1] にある。）ここでは，積分変数一変数の場合に限定して，この種の差分微分方程式の explicit な表示を与える。

$f=x^{n}+t_1x^{n-1}+\cdots+t_n$ を次数 n の一般の多項式とする。このfに対する差分微分方程式を連立系で表示することにすると，基底として例えば

$$u_1(\lambda)=\int f^{\lambda}dx,\ u_2(\lambda)=\int xf^{\lambda}dx,\ \ldots,\ u_{n-1}(\lambda)=\int x^{n-2}f^{\lambda}dx$$

をとることができ，この基底 $\vec{u}(\lambda)={}^{t}(u_1(\lambda),\ldots,u_{n-1}(\lambda))$ に対して次の様な方程式系が生ずる（$t=(t_1,\ldots,t_n)$ は明示しない）:

$$\vec{u}(\lambda)=A(\lambda)\vec{u}(\lambda-1)\quad,\quad D_{t_k}\vec{u}(\lambda)=C^{(k)}(\lambda)\vec{u}(\lambda).$$

ここで，$A(\lambda)$，$C^{(k)}(\lambda)$ は，$(h-1)\times(h-1)$ 行列で，その成分は夫々，$Q(\lambda)[t]$，$Q(\lambda)[t,\Delta^{-1}]$ に属す。（Δ は f の判別式＝根の差積の平方。）ところが，この $A(\lambda)$，$C^{(k)}(\lambda)$ には，λ の因子が不規則に混入する等不合理な点がある。そこで，この基底を修正してよりよい基底を構成し，その《よい基底》を用いて差分微分方程式系の具体表示を与えることにする。（但し，《よい基底》を今は天下りに構成する。）

1.《よい基底》の構成. まず $f=x^h(1+t_1x^{-1}+\cdots+t_hx^{-h})$ と書いて，（　）内を x^h に対する摂動項と思う。そこで，f の分数巾 $f^{\frac{i}{h}}=x^i(1+t_1x^{-1}+\cdots+t_hx^{-h})^{\frac{i}{h}}$ を考えると，摂動項に対応する部分は $x=\infty$ で正則，全体として i 位の極をもつ $(i=1,\cdots,h-1)$。$f^{\frac{i}{h}}$ を $x=\infty$ で Laurent 展開して

$$f^{\frac{i}{h}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}x^{i-\nu}C(i,\nu)\ ,\quad C(i,\nu)\in Q[t]$$

と書き，x に関して多項式の部分

$$g_i=\sum_{\nu=0}^{i}x^{i-\nu}C(i,\nu)$$

をとる。これを x で微分して

$$e_i=\frac{1}{i}D_x(g_i)=\sum_{\nu=0}^{i-1}\left(1-\frac{\nu}{i}\right)x^{i-\nu-1}C(i,\nu)$$

とおくと，e_i は，主係数 1 の $i-1$ 次多項式である。この e_i を用いて

$$u_i(\lambda)=\int e_if^{\lambda}dx\qquad(i=1,\cdots,h-1)$$

をとり，$e_1, \dots, e_{h-1}$ または $u_1(\lambda), \dots, u_{h-1}(\lambda)$ を≪よい基底≫と称する。上の $C(i,\nu)$ は，具体的には次の式で与えられる：

$$C(i,\nu) = \sum_{\alpha \in P(\nu)} \frac{i}{h}\left(\frac{i}{h}-1\right)\cdots\left(\frac{i}{h}-|\alpha|+1\right) t^{\alpha}/\alpha!.$$

ここで $P(\nu)$ は ν の分割

$$P(\nu) = \{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_h) \in \mathbb{N}^h;\ \sum_{k=1}^{h} k\alpha_k = \nu \}$$

で，$|\alpha| = \sum_{k=1}^{h} \alpha_k$，$t^{\alpha}/\alpha! = t_1^{\alpha_1}\cdots t_h^{\alpha_h}/\alpha_1!\cdots\alpha_h!$.

<u>2. 差分微分方程式の表示.</u> この≪よい基底≫を用いると，$\vec{u}(\lambda) = {}^t(u_1(\lambda), \dots, u_{h-1}(\lambda))$ について，次の様な差分方程式が生ずる：

$$\text{(A)} \qquad E(\lambda)\vec{u}(\lambda) = \lambda A \vec{u}(\lambda-1).$$

ここで，$E(\lambda)$ は (i,i) 成分が $h\lambda+i$ の対角行列，$A=(a_{ij})$ は，$\mathbb{Q}[t]$ 係数の行列で次の著しい性質をもつ：(A.0) t_k の重みを k と数えるとき，a_{ij} は重み $h+i-j$ の有重多項式。(A.1) A は，反対角線に関して対称（$J=\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，AJ が対称）。(A.2) $\det A = (-1)^{[\frac{h}{2}]}\Delta/h$. さらに，上に用いた $C(i,\nu)$ によって A の成分は

$$\begin{aligned} a_{i,h-j} &= \frac{h}{j}\sum_{\nu=1}^{i} \nu C(i,i-\nu)C(j,j+\nu) \\ &\quad + \frac{h}{i}\sum_{\nu=1}^{j} \nu C(j,j-\nu)C(i,i+\nu) \end{aligned}$$

と表わされる。

$d_t = \sum_{k=1}^{h} dt_k \frac{\partial}{\partial t_k}$ と書いておくと，d_t の $\vec{u}(\lambda)$ への作用は $\vec{u}(\lambda-1)$ によって

(B) $$d_t\vec{u}(\lambda) = \lambda B\,\vec{u}(\lambda-1)$$

と表わされ，Bの成分は $\sum_{k=1}^{h} \mathbb{Q}[t]\,dt_k$ の形の微分形式となる。$B=(b_{ij})$ について：(B.1) $b_{ij} = d_t a_{ij}/(h+i-j)$ （b_{ij} は a_{ij} を外微分して重みで割ったもの。dt_k の重みも k と数えれば b_{ij} も重み $h+i-j$ で斉重となる。）(B.2) $AB=BA$ なる性質がある。(A.1) (B.1) から B もまた反対角線に関して対称である。（性質 (B.1) (B.2) は，2つの表示式 (A) (B) の両立条件として得られる。）

$C = BA^{-1}$ とおけば，(A.2) から，C は判別式 Δ に高々1位の極をもつ微分形式の行列で，再び反対角線に関して対称であって，

(C) $$d_t\vec{u}(\lambda) = C\,E(\lambda)\,\vec{u}(\lambda)$$

の形の微分方程式系が得られる。（$h=3$, $\lambda=-\frac{1}{2}$ の場合が，Gauß の超幾何方程式に対応する。）

行列 B, C は上の手続きで A から計算される。行列 A については，$C(i,\nu)$ を用いた成分の表示を与えたが，このノートの末尾に $h=2,3,4,5$ の場合の具体形を掲げておく。

3. 注釈．（その1）上で構成した《よい基底》は，Saito-Yano-Sekiguchi [3] によって導入された flat coordinate と次の様な関係にあることを，この研究集会の会期中に 矢野環

先生が検証された。$t_1=0$ として，$f=x^{\ell+1}+t_2x^{\ell-1}+\cdots+t_{\ell+1}$ を A_ℓ 型孤立特異点の versal deformation と思う。このとき $t=(t_2,\ldots,t_{\ell+1})$ 空間の flat coordinate $s=(s_2,\ldots,s_{\ell+1})$ は，

$$\frac{i}{\ell+1}s_{i+1}=f^{\frac{i}{\ell+1}}\text{ の展開の }-1\text{ 次の係数}$$
$$=c(i,i+1)$$

で定義され，f の係数を $s=(s_2,\ldots,s_{\ell+1})$ の座標でみたとき

$$e_1=\frac{\partial f}{\partial s_{\ell+1}},\ e_2=\frac{\partial f}{\partial s_\ell},\ \ldots,\ e_\ell=\frac{\partial f}{\partial s_2}$$

なる等式が成立する。（この観点からすれば≪よい基底≫は≪平坦な基底≫と呼ぶべきものになっている。）f の分数巾と，flat coordinate との間に，何故このような奇妙な関係があるのか，今のところはよくわからない。（Yano [4] も参照。）

（その2）f の複素巾でなく，δ-函数 $\delta(y-f(t,x))$ の積分を考えると；$u_i(\lambda,t)$ と

$$v_i(y,t)=\int e_i\,\delta(y-f)\,dx$$

は，形式的に Mellin 変換で

$$u_i(\lambda-1)=\int v_i(y,t)\,y^{\lambda-1}dy$$

と対応する。この対応関係によって，n°2 の表示式を，積分 $\int\delta(y-f)\,dx$ に対する Gauß-Manin の微分方程式系に移しかえることができる。

（その3）n°2 で与えた表示式は，x の平行移動に関する不変性を有している。言い換えると，ベクトル場

$$\mathcal{D}_t = \sum_{k=1}^{h} (h+1-k)\, t_{k-1} \frac{\partial}{\partial t_k} \qquad (t_0 = 1)$$

について，$\mathcal{D}_t A = 0$ となる。 B についても，dt_k を τ_k と書き直して，$\mathcal{D}_\tau$ を上と同じ式で定義するとき，$(\mathcal{D}_t + \mathcal{D}_\tau) B = 0$ となる。（C についても同様。）

4. 以下順に，≪よい基底≫について，n°2 の形の表示が得られることを示していく。その前に，差分微分方程式を引き出す枠組について説明しておく。一般多項式 $f = x^h + t_1 x + \cdots + t_h$ に対して係数環として，h 変数の多項式環 $\mathbb{Q}[t] = \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_h]$ をとる。中のパラメータは，不定元と考えることにする。そこで，被積分函数の加群として

$$M = \mathbb{Q}(\lambda)[t, x, f^{-1}]\, f^{\lambda}$$

をとる（f^{λ} は基底を表わす記号と思う）。

$$D_x(g(\lambda) f^{\lambda}) = D_x(g(\lambda)) f^{\lambda} + \lambda\, g(\lambda) D_x(f) f^{\lambda-1}; \; g(\lambda) \in \mathbb{Q}(\lambda)[t, x, f^{-1}]$$

等の作用で，M は $\mathbb{Q}(\lambda)[t, x, D_t, D_x]$ 上の左加群となる。これに対して，x に関する de Rham 複体

$$\Omega_x^{\cdot}(M): \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_x} \Omega_x^1 \underset{\mathbb{Q}[x]}{\otimes} M \longrightarrow 0$$

をとる。（$\Omega_x^1 = \mathbb{Q}[x]dx$，$d_x = dx \otimes D_x$.）これに，次のフィルトレーションを入れる：

$$\Omega_x^{\cdot}(M)_m: \quad 0 \longrightarrow M_m \xrightarrow{d_x} \Omega_x^1 \underset{\mathbb{Q}[x]}{\otimes} M_{m+1} \longrightarrow 0$$

ここで $M_m = \mathbb{Q}(\lambda)[t, x] f^{\lambda - m}$ $(m \in \mathbb{Z})$．このとき，

<u>命題</u> i) 各 $m\in\mathbb{Z}$ について, $H^0(\Omega_x^\cdot(M)_m)=0$. また

$$H^1(\Omega_x^\cdot(M)_m)\xleftarrow{\sim}\mathbb{Q}(\lambda)[t,x]^{(h-2)}f^{\lambda-m-1}dx.$$

で, $H^1(\Omega_x^\cdot(M)_m)$ は, 階数 $h-1$ の自由 $\mathbb{Q}(\lambda)[t]$-加群。

(ここで $\mathbb{Q}(\lambda)[t,x]^{(d)}$ は xについて d次以下の多項式全体。)

ii) 各 $m\in\mathbb{Z}$ について

$$\mathbb{Q}[t,\Delta^{-1}]\underset{\mathbb{Q}[t]}{\otimes}H^1(\Omega_x^\cdot(M)_m)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}[t,\Delta^{-1}]\underset{\mathbb{Q}[t]}{\otimes}H^1(\Omega_x^\cdot(M)).$$

この命題の証明は古典的と思われるので略す。(Pham [2] の Introduction にある命題と本質的に同じ。) この命題から, $e_1,\dots,e_{h-1}\in\mathbb{Q}[t,x]^{(h-2)}$ を $\mathbb{Q}[t]$-基底となるようにとれば, 剰余類, $[e_if^{\lambda-m-1}dx]$ が, $H^1(\Omega_x^\cdot(M)_m)$ の $\mathbb{Q}(\lambda)[t]$-基底を与えることがわかる。このことから

$$\left.\begin{aligned} e_if^{\lambda}dx &\equiv \sum_{j=1}^{h-1}a_{ij}(\lambda)e_jf^{\lambda-1}dx\\ D_{t_k}(e_if^{\lambda})dx &\equiv \sum_{j=1}^{h-1}b_{ij}^{(k)}(\lambda)e_jf^{\lambda-1}dx\end{aligned}\right.\quad(\mathrm{mod}\ d_xM_0)$$

なる $a_{ij}(\lambda),\ b_{ij}^{(k)}(\lambda)\in\mathbb{Q}(\lambda)[t]$ が一意に定まる。

$$u_i(\lambda-m)=e_if^{\lambda-m}dx\quad\mathrm{mod}\ d_xM$$

と書けば, 上の2式が

$$u_i(\lambda)=\sum_{j=1}^{h-1}a_{ij}(\lambda)u_j(\lambda-1)$$

$$D_{t_k}u_i(\lambda)=\sum_{j=1}^{h-1}b_{ij}^{(k)}(\lambda)u_j(\lambda-1)$$

なる方程式系を与える訳である。

5. 表示(A)と行列 A の対称性. $n^\circ 1$ の記号を踏襲する。表示(A)を得るためには, 各 i で, $he_if - g_iD_x(f)$ が x について高々 $h-2$ 次であることを言えばよい。そうすれば,

$$(5.1)\qquad he_if - g_iD_x(f) = \sum_{j=1}^{h-1} a_{ij}e_j \qquad (i=1,\dots,h-1)$$

なる $a_{ij} \in \mathbb{Q}[t]$ が一意に定まる。部分積分により,

$$-g_iD_x(f)f^{\lambda-1}dx \equiv \frac{i}{\lambda}e_if^{\lambda}dx \pmod{d_xM_0}$$

だから, (5.1) 式から

$$\left(h+\frac{i}{\lambda}\right)e_if^{\lambda}dx \equiv \sum_{j=1}^{h-1} a_{ij}e_jf^{\lambda-1}dx \pmod{d_xM_0}$$

となる —— これが表示(A)を与える。記号の便宜として

$$\varphi = \sum_{\nu=-\infty}^{N} x^{\nu}c_{\nu}$$

の形の巾級数に対して

$$[\varphi]_+ = \text{多項式部分} = \sum_{\nu\geq 0} x^{\nu}c_{\nu}$$

$$[\varphi]_- = \varphi - [\varphi]_+ = \sum_{\nu<0} x^{\nu}c_{\nu}$$

$$[\varphi]_\mu = x^\mu \text{の係数} = c_\mu$$

と書くことにする。例えば $e_i = \frac{1}{i}\left[D_x(f^{\frac{i}{h}})\right]_+ = \frac{1}{h}\left[D_x(f)f^{\frac{i}{h}-1}\right]_+$.

補題 1. «よい基底» の e_i $(i=1,\dots,h-1)$ について, $he_if - g_iD_x(f)$ は高々 $h-2$ 次式。

証明) $he_if = \left[D_x(f)f^{\frac{i}{h}-1}\right]_+ f = D_x(f)f^{\frac{i}{h}} - \left[D_x(f)f^{\frac{i}{h}-1}\right]_- f$

$g_iD_x(f) = D_x(f)\left[f^{\frac{i}{h}}\right]_+ = D_x(f)f^{\frac{i}{h}} - D_x(f)\left[f^{\frac{i}{h}}\right]_-$

従って, $he_if - g_iD_x(f) = D_x(f)\left[f^{\frac{i}{h}}\right]_- - \left[D_x(f)f^{\frac{i}{h}-1}\right]_- f$.

ここで，$D_x(f)[f^{\frac{i}{h}}]_-$ は高々 $h-2$ 次。一方 $D_x(f)f^{\frac{i}{h}-1} = \frac{h}{i}D_x(f^{\frac{i}{h}})$ の -1 次の係数は 0 だから，$[D_x(f)f^{\frac{i}{h}-1}]_-\cdot f$ も高々 $h-2$ 次となる。□.

これで表示(A)が保証された。次に行列 A の対称性を問題にする。そのために，同型 $\mathbb{Q}[t,x]^{(h-2)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}[t,x]/\mathbb{Q}[t,x]D_x(f)$ に注目して，次の記号 $\langle\ \ \rangle$ を導入する。一般の $g\in\mathbb{Q}[t,x]$ を，$g = q\cdot D_x(f) + r$ （$q, r\in\mathbb{Q}[t,x]$，$\deg_x r\leq h-2$）と書いて，$\langle g\rangle = r$ の $h-2$ 次の係数 とおく。（$D_x(f)^{-1}$ を $x=\infty$ で展開すれば $\langle g\rangle = h[g/D_x(f)]_{-1}$ と言ってもよい。）これについて，

<u>補題 2.</u> 《よい基底》$e_1,\dots,e_{h-1}$ について，$\langle e_ie_j\rangle = \delta_{i,h-j}$.

証明）$i+j\leq h$ のときは明らか（e_i は $i-1$ 次式で主係数 1 だから）。$i+j = h+k$，$k>0$ とする。$ie_i = D_x(f^{\frac{i}{h}}) - [D_x(f^{\frac{i}{h}})]_-$ 等から，

$$ij\,e_ie_j = D_x(f^{\frac{i}{h}})D_x(f^{\frac{j}{h}}) - D_x(f^{\frac{i}{h}})[D_x(f^{\frac{j}{h}})]_- - [D_x(f^{\frac{i}{h}})]_-D_x(f^{\frac{j}{h}}) + [D_x(f^{\frac{i}{h}})]_-[D_x(f^{\frac{j}{h}})]_-.$$

$\langle\ \ \rangle$ をとるには，右辺の多項式部分（各項の）に注目すればよい。後の 3 項は $h-3$ 次以下。第 1 項は

$$\begin{aligned}D_x(f^{\frac{i}{h}})D_x(f^{\frac{j}{h}}) &= \frac{ij}{h^2}D_x(f)^2f^{\frac{i}{h}+\frac{j}{h}-2}\\ &= \frac{ij}{h^2}D_x(f)^2f^{\frac{k}{h}-1} = \frac{ij}{hk}D_x(f)\,D_x(f^{\frac{k}{h}})\\ &= \frac{ij}{hk}D_x(f)[D_x(f^{\frac{k}{h}})]_+ - \frac{ij}{hk}D_x(f)[D_x(f^{\frac{k}{h}})]_-\end{aligned}$$

この式の第1項は $D_x(f)$ の倍数，第2項は高々 $h-3$ 次だから，$D_x(f^{\frac{i}{h}})D_x(f^{\frac{j}{h}})$ の多項式部分についても $\langle\ \rangle$ は 0 となる。即ち $i+j>h$ ならば $\langle e_ie_j\rangle=0$ である。□

さて，(5.1) 式から，

$$he_if\equiv\sum_{k=1}^{h-1}a_{ik}e_k \pmod{D_x(f)}.$$

両辺に e_j を掛けて $\langle\ \rangle$ をとると，補題2から

$$(5.2)\qquad a_{i,h-j}=h\langle e_ie_jf\rangle \qquad (1\le i,j\le h-1)$$

を得，右辺は i,j について対称となる。これが A の対称性 (A.1) の内容である。(5.2) の右辺を 補題 2の証明と同様の方法で計算すると

$$a_{i,h-j}=-\frac{h}{j}\left[f^{\frac{i}{h}}\left[D_x(f^{\frac{j}{h}})\right]_-\right]_{-1}-\frac{h}{i}\left[f^{\frac{j}{h}}\left[D_x(f^{\frac{i}{h}})\right]_-\right]_{-1}$$

となる。これを書き下した式が，n°2 で掲げた表示式である。

この n°5 の最後に，$\det A$ を決定しておく。まず n°4 の命題の ii) から，行列 A は $\mathbb{Q}[t,\Delta^{-1}]$ でみると可逆である。従って $\det A$ は Δ の巾を割り切る。Δ は t の多項式として既約だから，$\det A$ は Δ の巾の定数倍 ($\in\mathbb{Q}$) となる。そこで $\det A$ と Δ の t についての重みに注目すると，両者とも重み $h(h-1)$ なので，$\det A=c\cdot\Delta$ $(c\in\mathbb{Q})$ の形となる。c を求めるには，$f=x^h-1$ $(t_1=\cdots=t_{h-1}=0,\ t_h=-1)$ について，

$\det A$ と Δ を比較すれば十分である。このとき $a_{i,h-j}$ の表示式から $A=-hI$ （I は単位行列）で $\det A=(-h)^{h-1}$. 一方 $\Delta=(-1)^{\frac{1}{2}h(h-1)+h-1}\cdot h^h$ から、$C=(-1)^{\frac{1}{2}h(h-1)}/h=(-1)^{[\frac{h}{2}]}/h$ を得る。

6. 表示(B)と両立条件. まず≪よい基底≫に対する表示(B)を確認する。k （$1\leq k\leq h$）を1つ固定して $D_t=D_{t_k}$ と書くことにする。このとき

$$
\begin{aligned}
iD_t(e_if^\lambda)dx &= D_t(D_x(g_i)f^\lambda)dx \\
&= \lambda D_x(g_i)D_t(f)f^{\lambda-1}dx + D_x(D_t(g_i))f^\lambda dx \\
&\equiv \lambda\left(D_x(g_i)D_t(f)-D_t(g_i)D_x(f)\right)f^{\lambda-1}dx \\
&\qquad (\mathrm{mod}\ d_xM_\circ)
\end{aligned}
$$

である。従って、$D_x(g_i)D_t(f)-D_t(g_i)D_x(f)$ が高々 $h-2$ 次式であることがわかれば これを $i\sum_{j=1}^{h-1}b_{ij}e_j$ と書いて $D_t\vec{u}(\lambda)=\lambda B\vec{u}(\lambda-1)$ （$B=(b_{ij})$）の形の表示が得られることになる。

［補題 3. $D_x(g_i)D_t(f)-D_t(g_i)D_x(f)$ は高々 $h-2$ 次式。

証明） $D(g_i)=\frac{i}{h}f^{\frac{i}{h}-1}D(f)-\frac{i}{h}[f^{\frac{i}{h}-1}D(f)]_-$ の形の式を与式に代入すると

$$
\frac{i}{h}[f^{\frac{i}{h}-1}D_t(f)]_-D_x(f)-\frac{i}{h}[f^{\frac{i}{h}-1}D_x(f)]_-D_t(f)
$$

これが $h-2$ 次以下となることはみやすい。□

次に２つの表示

$$E(\lambda)\vec{u}(\lambda)=\lambda A\vec{u}(\lambda-1),\quad D_t\vec{u}(\lambda)=\lambda B\vec{u}(\lambda-1)$$

から，両立条件として性質（B.1）（B.2）を導く。$E(\lambda+1)\vec{u}(\lambda+1)$ を D_t で微分したものを２通りにみると，$D_t(A)\vec{u}(\lambda)+AD_t\vec{u}(\lambda)=E(\lambda+1)B\vec{u}(\lambda)$. これを $\vec{u}(\lambda-1)$ で統一すると

$$D_t(A)E(\lambda)^{-1}A\vec{u}(\lambda-1)+AB\vec{u}(\lambda-1)$$
$$=E(\lambda+1)BE(\lambda)^{-1}A\vec{u}(\lambda-1)$$

$u_i(\lambda-1)$ は，$\mathbb{Q}[t,\Delta^{-1}]\otimes_{\mathbb{Q}[t]}H^1(\Omega_x^{\cdot}(M))$ の元として $\mathbb{Q}(\lambda)[t,\Delta^{-1}]$ 上の自由基底を与えるから，行列として

$$D_t(A)E(\lambda)^{-1}A+AB=E(\lambda+1)BE(\lambda)^{-1}A$$

が成立する。両辺の (i,j) 成分をとり整理すると

$$\sum_r\frac{1}{h\lambda+r}\{D_t(a_{ir})-(h+i-r)b_{ir}\}a_{rj}$$
$$+\sum_r(a_{ir}b_{rj}-b_{ir}a_{rj})=0$$

となる。$1,\ \dfrac{1}{h\lambda+r}\ (r=1,\dots,h-1)$ は $\mathbb{Q}(\lambda)[t]$ において $\mathbb{Q}[t]$ 上独立だから

$$\{D_t(a_{ir})-(h+i-r)b_{ir}\}a_{rj}=0$$
$$\sum_r(a_{ir}b_{rj}-b_{ir}a_{rj})=0.$$

を得る。A の各行に 0 でない成分があるから上の式で $\{\ \}$ が 0 となる。即ち $b_{ij}=D_t(a_{ij})/h+i-j$. 下の式は $AB=BA$. これで（B.1）（B.2）が示せた。

7. 付録. $h=2,3,4,5$ に対する《よい基底》$e_1,\dots,e_{h-1}$ と行列 A を掲げておく。但し, $h=3,4,5$ では一般多項式 f で $t_1=0$ とした形：$f=x^h+t_2x^{h-2}+\cdots+t_h$ で書いておく。

($h=2$) $\quad e=1,\quad A=2t_2-\frac{1}{2}t_1^2$

($h=3$) $\quad \begin{cases} e_1=1 \\ e_2=x \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 3t_3, & 2t_2 \\ -\frac{2}{3}t_2^2, & 3t_3 \end{pmatrix}$

($h=4$) $\quad \begin{cases} e_1=1 \\ e_2=x \\ e_3=x^2+\frac{1}{4}t_2 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 4t_4-\frac{1}{2}t_2^2, & 3t_3, & 2t_2 \\ -\frac{5}{4}t_2t_3, & 4t_4-t_2^2, & 3t_3 \\ \frac{1}{8}t_2^3-\frac{3}{4}t_3^2, & -\frac{5}{4}t_2t_3, & 4t_4-\frac{1}{2}t_2^2 \end{pmatrix}$

($h=5$) $\quad e_1=1 \qquad e_2=x$

$\qquad e_3=x^2+\frac{1}{5}t_2 \qquad e_4=x^3+\frac{2}{5}t_2x+\frac{1}{5}t_3$

$A=(a_{ij})$ ($a_{i,h-j}=a_{j,h-i}$ に注意して補う。)

$a_{11}=5t_5-t_2t_3,\ a_{12}=4t_4-\frac{4}{5}t_2^2,\ a_{13}=3t_3,\ a_{14}=2t_2$

$a_{21}=-\frac{6}{5}t_2t_4-\frac{3}{5}t_3^2+\frac{6}{25}t_2^3,\ a_{22}=5t_5-2t_2t_3,$

$a_{23}=4t_4-\frac{6}{5}t_2^2,\quad a_{31}=-\frac{7}{5}t_3t_4+\frac{14}{25}t_2^2t_3$

$a_{32}=-\frac{6}{5}t_2t_4-\frac{6}{5}t_3^2+\frac{8}{25}t_2^3$

$a_{41}=-\frac{4}{5}t_4^2+\frac{8}{25}t_2^2t_4+\frac{8}{25}t_2t_3^2-\frac{6}{125}t_2^3$

——— * ———

文献.

[1] Bernstein, I.N. : The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, Funct. Analysis and its Appl., 6(4) 1972, 26-40.

[2] Pham, F. : Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Birkhäuser, 1979.

[3] Saito, K., Yano, T. and Sekiguchi, J. : On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group, Comm. in algebra, 8(4) 1980, 373-408.

[4] Yano, T. : Free deformations of isolated singularities, Science Report of the Saitama Univ., Ser A, Vol. IX, No. 3, 1980, 61-70.