数理解析研究所講究録
第434巻 1981年 28-46

弦のランダムな運動を記述する無限次元確率微分方程式について

名大 理　　舟木直久

無限次元確率微分方程式の一つの応用として，次の$\mathbb{R}^d$上の確率微分方程式 (1) で定まる拡散過程によって振動される弦のランダムな運動を考察する。

$$(1) \qquad dx_t = a(x_t)dW_t + b(x_t)dt$$

ここで，$a : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$; 有界かつ Lipschitz 連続，$b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$: Lipschitz 連続で，W_t は d次元Brown 運動とする。$\mathbb{R}^d$内の連続な弦の全体は，パラメーター $\sigma \in [0,1]$ を用いて，Banach空間 $\mathcal{C} = C([0,1], \mathbb{R}^d)$ をなすと考えることができる。以下，最初に，x_tによって振動されると考えられる弦の運動を記述する $\mathcal{C}$-値確率微分方程式を，折線近似とあるスケール変換によって導き，次に，この方程式のいくつかの性質を論ずる。

§1．弦の方程式

弦の方程式を導く為に，まず弦をN等分し，その各点に枝

子を一つずつ置く。各粒子は，拡散係数 $\sqrt{N}a(x)$， drift 係数 $b(x)$ で，揺動力は独立であるような拡散運動をし，隣り合った粒子間には，その大きさが $\kappa \cdot N^2$ $(\kappa>0)$ に比例する harmonic potential から決まる相互作用が働くものとする。弦の運動は，これらの N 粒子の折線近似で与える。即ち，$X_t^{(N)}(\sigma)$ $(t \geq 0,$ $\sigma \in [0,1])$ を，この折線のパラメーター σ で決まる点の t 時での位置とするとき，まず，$\{X_t^{(N)}(\frac{k}{N})\}_{k=1}^{N}$ は次の確率微分方程式の解として与えられる。

$$dX_t^{(N)}(\tfrac{k}{N}) = \sqrt{N}\,a(X_t^{(N)}(\tfrac{k}{N}))\,dW_t(k) + b(X_t^{(N)}(\tfrac{k}{N}))\,dt + \frac{\kappa}{2}\Delta^{(N)}X_t^{(N)}(\tfrac{k}{N})\,dt$$
$$1 \leqq k \leqq N.$$

但し，$\{W_t(k)\}_{k=1}^{N}$ は，N 個の独立な d 次元 Brown 運動，

$$\Delta^{(N)}X_t^{(N)}(\tfrac{k}{N}) = N^2\{X_t^{(N)}(\tfrac{k+1}{N}) - 2X_t^{(N)}(\tfrac{k}{N}) + X_t^{(N)}(\tfrac{k-1}{N})\}$$

この方程式には，$X_t^{(N)}(0)$，$X_t^{(N)}(\frac{N+1}{N})$ も現れる。従って，適当な境界条件が必要である。ここでは，以下の三通りを考える。

$$\begin{cases} \text{(i) (自由端)} & X_t^{(N)}(0) = X_t^{(N)}(\frac{1}{N}), \quad X_t^{(N)}(\frac{N+1}{N}) = X_t^{(N)}(1) \\ \text{(ii) (片方自由, 片方固定)} & X_t^{(N)}(0) = A_0, \quad X_t^{(N)}(\frac{N+1}{N}) = X_t^{(N)}(1) \\ \text{(iii) (固定端)} & X_t^{(N)}(0) = A_0, \quad X_t^{(N)}(\frac{N+1}{N}) = A_1. \end{cases}$$

但し，$A_0, A_1 \in \mathbb{R}^d$: fixed.

$\sigma \in [0,1]$ に対しては，$X_t^{(N)}(\sigma)$ は，上の $\{X_t^{(N)}(\frac{k}{N})\}_{k=1}^{N}$ の折線近似で与える。 i.e.

$$X_t^{(N)}(\sigma) = (N\sigma - k + 1)\, X_t^{(N)}\left(\tfrac{k}{N}\right) + (k - N\sigma)\, X_t^{(N)}\left(\tfrac{k-1}{N}\right)$$

$$\sigma \in \left[\tfrac{k-1}{N}, \tfrac{k}{N}\right] \quad , \quad 1 \leqq k \leqq N$$

$\{X_t^{(N)}(\frac{k}{N})\}_{k=1}^N$ は，上の確率微分方程式の解だから t について連続である。従って，$X_t^{(N)}(\cdot) \in C([0,\infty), \mathcal{C})$ (a.s.)。この確率過程が定める $C([0,\infty), \mathcal{C})$ 上の確率分布を $P^{(N)}$ と書く。

$X_t^{(N)}$ は，$N \to \infty$ のとき，次の $\mathcal{C}$ 上の確率微分方程式の解 X_t に近づくことがわかる。

(2) $\quad dX_t(\sigma) = a(X_t(\sigma))\, dB_t(\sigma) + b(X_t(\sigma))\, dt + \frac{K}{2} \Delta X_t(\sigma)\, dt$

ここで，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}$ で，$B_t(\sigma)$ は，$L^2([0,1], \mathbb{R}^d)$ 上の cylindrical な Brown 運動。(i.e. $\frac{dB_t}{dt}(\sigma)$ は，$(t,\sigma) \in [0,\infty) \times [0,1]$ 上の d 次元 Gaussian white noise) 先の三つの場合に対応して，方程式(2)には，それぞれ，次のような境界条件がつく。

$$\begin{cases} \text{(i)} & \frac{\partial X_t}{\partial \sigma}(0) = \frac{\partial X_t}{\partial \sigma}(1) = 0 \\ \text{(ii)} & X_t(0) = A_0 \ , \quad \frac{\partial X_t}{\partial \sigma}(1) = 0 \\ \text{(iii)} & X_t(0) = A_0 \ , \quad X_t(1) = A_1 \end{cases}$$

より正確に言えば，方程式(2)を半線形熱方程式と考えて，積分方程式に直して，数学的な意味を与えることができ，その解は一意的に存在して，

$$X_t \in C([0,\infty), \mathcal{C}) \quad \text{(a.s.)}$$

が言える。(i.e. X_t は，$\mathcal{C}$-値連続確率過程) 解 X_t の与える確率分布を P とすれば，初期値に関して，$X_0^{(N)}$ が X_0 の折

線近似であるという条件の下で,

<u>定理1</u>　$N\to\infty$ のとき, $P^{(N)}$ は, P に弱収束する。

故に, 方程式(2)が, x_t によって振動される弦のランダムな運動を記述すると考えることができ, 以下の各節で, この方程式に関する性質を, いくつか論ずる。

§2, "$\kappa\to\infty$" の極限

パラメーター κ は, 弦の弾性率を表わすと考えられる。そこで, (2)の解 X_t の κ- 依存性を明確にする為に, これを $X_t^{(\kappa)}$ と書くとき, $X_t^{(\kappa)}$ の $\kappa\to\infty$ の極限は,

(i) の自由端のときは, 一点に縮まり, その運動は, 弦の振動力を与える最初の確率微分方程式 (1) に従がい,

(ii) の片方が固定端のときには, 一点 A_0 に縮まり,

(iii) の両方が固定端のときには, 線分 $\overline{A_0A_1}$ に近づく,

と予想できる。実際, 次のことが証明できる。

$P^{(\kappa)}$: $X_t^{(\kappa)}$ の定める $C([0,\infty), \mathcal{E})$ 上の確率分布,

$P^{(\infty)}$: 次の $X_t^{(\infty)}$ の定める確率分布.

但し, x_t は, 初期値 $x_0=\int_0^1 X_0(\sigma)\,d\sigma$ (弦の重心) をもつ (1) の解として,

$$X_t^{(\infty)}(\sigma) \equiv \begin{cases} x_t & (\forall \sigma) & : \text{case (i)} \\ A_0 & (\forall t, \sigma) & : \text{case (ii)} \\ (1-\sigma)A_0 + \sigma A_1 & (\forall t) & : \text{case (iii)} \end{cases}$$

このとき,

<u>定理2</u>　$K \to \infty$ のとき, $P^{(K)}$ は, $P^{(\infty)}$ に弱収束する。

更に, (ii), (iii) の場合には, $X_t^{(K)}$ の $X_t^{(\infty)}$ からの deviation

$$\lim_{K \to \infty} \sqrt{K}\,(X_t^{(K)} - X_t^{(\infty)})$$

について, 次のようなことがいえる。まず, Y_t を, 次のような二つの性質をもつ C- 値定常過程とする。

① $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \implies \{Y_{t_i}\}_{i=1}^{n}$ は独立確率変数系

② 各時刻 t での Y_t の分布は,

(ii)のときには, 0 から出発する d 次元 Brown 運動の導く, C 上の確率分布に等しく,

(iii)のときには, 0 から出発し, 0 に到達する d 次元 Brownian bridge の分布に等しい。

このとき,

<u>定理3.</u>　$K \to \infty$ のとき, $\{\sqrt{K}(X_t^{(K)} - X_t^{(\infty)}),\ t > 0\}$ の任意の有限次元分布は, $\{Y_t,\ t > 0\}$ のそれに収束する。

§3. ポテンシャル場 V 内の弦の運動

まず，有限次元の系に対する確率力学（stochastic dynamics）について述べる。$\mathbb{R}^n$ 上のポテンシャル場 $V(x)$ $(x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n)$ の中にある粒子の運動は，よく知られているように，Newton 方程式

$$\frac{d^2x_t}{dt^2} = -\nabla V(x_t) \qquad , \quad \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$$

によって記述される。これは，決定論的な方程式であるが，一方，以下に述べるランダムな時間発展を与える方程式によって運動を記述する方法もある。それは，Kolmogorov が最初に与えた次のような確率微分方程式である。

$$(3) \qquad dx_t = dw_t - \frac{1}{2}\nabla V(x_t)\,dt$$

ここで，w_t は n 次元 Brown 運動。この方程式が，V に対応する力学を与えると考える理由は，次のような点にある。ポテンシャル V に対する系（運動量変数 p を考えない系）の平衡状態は，次の $\mathbb{R}^n$ 上の Gibbs 分布

$$d\mu(x) = e^{-V(x)}\,dx \qquad (dx\text{ は，Lebesgue 測度})$$

であると考えられている。そこで，μ を不変測度にもつような確率的時間発展があれば，それを V から決まる確率力学系とよぶのが自然であろう。方程式 (3) は，このような性質をもっている。

方程式 (3) は，あるいは，次のようにしても導かれる。まず，

Newton方程式に，摩擦の効果とランダムなゆらぎの項を加え，次の方程式を考える。

$$\frac{d^2x_t}{dt^2} = -\gamma\frac{dx_t}{dt} - \frac{\gamma}{2}\nabla V(x_t) + \gamma\frac{dW_t}{dt}$$

ここで，$\gamma \to \infty$ とすれば，方程式(3)が得られる。即ち，物理的には，ランダムな外力をもち，摩擦による抵抗の影響が大きい場合を記述しているとも考えられる。このような立場から，(3)は，Smoluchowski の方程式とよばれることもある。

最近，このような確率力学は，無限次元の系に対しても考えられている。例えば，R. Lang : Unendlich-dimensionale Wienerprozesse mit Wechselwirkung I, II. Z. Wahr. verw Geb. 38, 39 (1977) や，H. Doss et G. Royer : Processus de diffusion associé aux mesures de Gibbs sur R^{Z^d}. ibid. 46 (1978) 等が見られる。

弦の方程式(2)にもどる。ここでは，$a(x) = I_d$ ($d\times d$ 単位行列)，$b(x) = -\frac{1}{2}\nabla U(x)$ であるような場合を考える。但し，U は次の条件を満たしているとする。

仮定 1. $U \in C^1(R^d)$ で，下に有界。∇U は，Lipschitz 連続である。

このとき，弦の Hamiltonian

$$H(X) = \int_0^1 U(X(\sigma))\,d\sigma + \frac{\kappa}{2}\int_0^1 \left|\frac{\partial X}{\partial\sigma}(\sigma)\right|^2 d\sigma, \quad X\in\mathcal{C}$$

を考えれば，$H(X)$ の汎関数微分の kernel が，

$$\frac{\delta H}{\delta X}(X)(\sigma) = \nabla U(X(\sigma)) - \kappa\Delta X(\sigma)$$

であることに注意して，方程式(2)は，次のように書き直すことができる。

$$dX_t(\sigma) = dB_t(\sigma) - \frac{1}{2}\frac{\delta H}{\delta X}(X_t)(\sigma)\,dt$$

これは，無限次元空間 $\mathcal{C}$ 上の Kolmogorov の方程式（あるいは，Smoluchowski の方程式）であるといえる。従って，その不変測度は，$\mathcal{C}$ 上の Feynmann 測度

$$\mathcal{D}(X) = \prod_{\sigma\in[0,1]} dX(\sigma)$$

を用いて，

$$e^{-H(X)}\,\mathcal{D}(X)$$

となることが予想できる。実際，以下のことが言える。

まず，W_σ を，時間変数 σ をもつ d 次元 Brown 運動とし，$\mathcal{C}$ 上の測度 $\mu^{(\kappa)}$ を，(i)〜(iii) のそれぞれの場合に応じて次に述べるように定義する。

(i) のとき，$\mu^{(\kappa)}$ は，初期分布 dx（d 次元 Lebesgue 測度）をもつ確率過程 $W_{\frac{\sigma}{\kappa}}$ ($\sigma\in[0,1]$) の導く測度

(ii) のとき，$\mu^{(\kappa)}$ は，点 A_0 から出発する Brown 運動の time change $W_{\frac{\sigma}{\kappa}}$ ($\sigma\in[0,1]$) の導く確率測度

(iii) のとき，$\mu^{(K)}$ は，点 A_0 から出発し，点 A_1 に到達する pinned Brownian motion $w_{\frac{\sigma}{K}}$ ($\sigma\in[0,1]$) の導く確率測度。

ν を，次のような $\mu^{(K)}$ に対して絶対連続な $\mathcal{C}$ 上の non-negative measure とする。

$$d\nu(X) = \exp\left\{-\int_0^1 U(X(\sigma))\,d\sigma\right\} d\mu^{(K)}(X)$$

このとき，

<u>定理4</u>. 仮定1の下で，ν は X_t の不変測度。更に強く，可逆測度 (reversible measure) でもある。

次に，ポテンシャル U が発散する場合を，境界条件 (iii)（固定端）の下で考える。次のような仮定をおく。

<u>仮定2</u>. $U : \mathbb{R}^d \longrightarrow (-\infty, \infty]$: 連続，下に有界。

$U \in C^1(D)$,　$D = \{x\in\mathbb{R}^d ; U(x) < \infty\}$

∇U は，$D_N = \{x\in\mathbb{R}^d ; U(x) < N\}$ 上 Lipschitz 連続 ($^\forall N = 1, 2, \cdots$)

$A_0, A_1 \in D$ で，D 内で結べる。

このような U に対して，(2)の定常解とよべるものを以下のようにして構成する。まず，U を D_N^c では適当に cut-off

して仮定１を満たすように作り直し，$U^{(N)}$とおく。$U^{(N)}$に対する(2)の定常解は，定理４により作ることができる。この確率過程が誘導する$(C((-\infty,\infty)), \mathcal{C})$上の確率分布を$P^{(N)}$とおく。このとき，次の仮定の下で，$\{P^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$の tightness が証明できる。

<u>仮定３.</u>
$$\sup_N E^{\mu^{(K)}}\left[\int_0^1 |\nabla U^{(N)}(X(\sigma))|^{10} d\sigma \, e^{-\int_0^1 U^{(N)}(X(\tau))d\tau}\right] < \infty$$

<u>注意</u>　次のポテンシャルは，$\forall K > 0$に対して，この仮定を満たす。

$$U(x) = U(|x|), \quad 0 < r_0 < \infty, \quad \alpha > 2$$

$$U(r) = \begin{cases} \infty & \text{if} \quad r \leqq r_0 \\ (r - r_0)^{-\alpha} & \text{if} \quad r > r_0. \end{cases}$$

<u>命題</u>　$\{P^{(N)}; N = 1, 2, \cdots\}$の任意の極限を$P$とすれば，$P$の定常分布は，$Z$を規格化定数として，

$$d\nu(X) = Z^{-1} \exp\left\{-\int_0^1 U(X(\sigma))d\sigma\right\} d\mu^{(K)}(X).$$

二点A_0, A_1を結ぶ$\bar{D}$（Dの閉包）内の連続な弦の全体を，$\mathcal{C}(\bar{D}; A_0, A_1)$とおけば，supp.$(\nu)$は，この集合に含まれる。

A_0, A_1 を含む $\overline{D}$ の連結成分の基本群を π_1 とすれば，π_1 の元 i に対して，$\mathcal{C}(\overline{D}; A_0, A_1)$ の連結成分 $\mathcal{C}_i$ が対応し，次のような分解が得られる。

$$\mathcal{C}(\overline{D}; A_0, A_1) = \bigcup_{i\in\pi_1} \mathcal{C}_i \qquad (\text{disjoint な和})$$

この分解は，次のような $\mathbb{P}$ の分解をひきおこす。

<u>定理5.</u> $\mathbb{P} = \sum_{i\in\pi_1} a_i \mathbb{P}_i$

但し，$a_i = \nu(\mathcal{C}_i)$

$$\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(\cdot \mid C((-\infty,\infty), \mathcal{C}_i)) \qquad (\text{条件付き確率})$$

即ち，ポテンシャル U が発散する場合に，方程式(2)を考えることができれば，それは，$\overline{D}$ の各一次元ホモトピー類に応じて，それぞれ異なる定常な時間発展を与えると言えるであろう。

次に，ホモトピー類 i ごとに，確率過程の分布 $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_i^{(K)}$ が，弾性率 K を無限大に近づけたときにどのようなものに収束するかを考える。但し，ここでは，$d=2$ とし，D は凸でない $\mathbb{R}^2$ 内の多角形とする。

まず，次のような Molchanov の結果：Diffusion processes and Riemannian geometry. Russian Math, Surveys <u>30</u> (1975)

に注意する。 i.e.

$\tilde{D}$: D の普遍被覆面

$p^{\tilde{D}}(t,x,y)$: $\tilde{D}$ 上の吸収壁 Brown 運動の遷移確率 $(x,y\in\tilde{D})$

とするとき,

<u>命題</u> $x,y\in\tilde{D}$, $\gamma_{x,y}$: x,y を結ぶ $\tilde{D}$ 内の最短曲線

$\gamma_{x,y}$ は, $\partial\tilde{D}$ に transversal であるとすれば,

$$p^{\tilde{D}}(t,x,y) = O\left(t^{k-1} e^{-\frac{\hat{\rho}^2(x,y)}{2t}}\right) \quad , (t\to 0)$$

但し, k は, $\gamma_{x,y}$ による定数で, $\hat{\rho}$ は, $\tilde{D}$ 上の距離。

この評価から, Molchanov は, $\mu_i^{(K)} = \mu^{(K)}(\cdot\,|\,e_i)$ とおくとき,

$$\mu_i^{(K)} \xrightarrow[K\to\infty]{} \delta_{\gamma_{A_0,A_1}}$$

を示している。但し, γ_{A_0,A_1} は, e_i の中の最短曲線。$d=2$ より, このようなものは一意的に存在する。更に, ポテンシャル V が,

<u>仮定4</u> $V(x) \leq C\cdot(\mathrm{dis}(x,\partial D))^{-\alpha}$, $\alpha<1+\sqrt{3}$

を満たしていれば,

$$\nu_i^{(K)} = \nu^{(K)}(\cdot\,|\,e_i) \xrightarrow[K\to\infty]{} \delta_{\gamma_{A_0,A_1}}$$

であることが証明できる。従って，

$$X^{(\infty)}_{t,i}(\sigma) = \bar{\gamma}_{A_0,A_1}(\sigma) \qquad (\forall t)$$

とおけば，

<u>定理6</u>. $\mathbb{P}^{(k)}_i \xrightarrow[k\to\infty]{} \delta_{X^{(\infty)}_{\cdot,i}}$

がいえた。

§4. <u>2次元の Brownian string</u>

特に，$d=2$，$a(x)=I_2$，$b(0)$，境界条件(i)（自由端）の場合を扱う。i.e. 考える方程式は，

$$\begin{cases} dX_t(\sigma) = dB_t(\sigma) + \frac{k}{2}\Delta X_t(\sigma)\,dt \\ \frac{\partial X_t}{\partial \sigma}(0) = \frac{\partial X_t}{\partial \sigma}(1) = 0 \end{cases}$$

X_t が C-値強 Markov 過程であることと，その重心の運動は2次元 Brown 運動であることとに注意して，次の結果が得られる。

<u>定理7</u>. (i) X_t は，C 値確率過程として，recurrent.

i.e. $P(X_{t_n} \in O,\ {}^{\exists}t_n \uparrow \infty,\ n=1,2,\cdots) = 1$，$\forall O$：$C$の開集合.

(ii) 弦 $X_t(\sigma)$ は，$\mathbb{R}^2$の任意の点を何回でも通過する。

i.e. $P(X_{t_n}(\sigma_n) = x,\ {}^{\exists}\sigma_n \in [0,1],\ {}^{\exists}t_n \uparrow \infty,\ n=1,2\cdots) = 1$，$\forall x \in \mathbb{R}^2$.

§5. 一般化

方程式(2)の一般化として，可分，実 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の，次のような半線形確率微分方程式を考える。

$$(4)\quad \begin{cases} dX_t = a(X_t)\,dB_t + b(X_t)\,dt - \kappa A X_t\,dt, & \kappa > 0 \\ X_0 \in \mathcal{H} \end{cases}$$

ここで，a，b，A，B_t は，次のようなものであるとする。

① A は，$\mathcal{H}$ 上の non-negative self-adjoint operator.
pure point spectrum $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$: $0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$ をもつ。
$k \to \infty$ のとき，$\lambda_k \sim c k^{1+\delta}$ $({}^{\exists}c, \delta > 0)$

② $a : \mathcal{H} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体$\}$
$\|(a^*(X_1) - a^*(X_2))\phi_k\| \leqq K \|X_1 - X_2\|$ for ${}^{\forall}X_1, X_2 \in \mathcal{H}$, ${}^{\forall}k = 1, 2, \cdots$;
但し，$a^*(X)$ は $a(X)$ の adjoint operator で，ϕ_k は，固有値 λ_k に対応する A の normalized eigenvector.

③ $b : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
$\|b(X_1) - b(X_2)\| \leqq K \|X_1 - X_2\|$ for ${}^{\forall}X_1, X_2 \in \mathcal{H}$

④ B_t は，$\mathcal{H}$ 上の cylindrical Brownian motion. i.e.
$\{B_t : t \geqq 0\}$ は，$\mathcal{H}$ 上の random linear functionals の族で，$B_0 = 0$ かつ，
${}^{\forall}\phi \in H$ $(\phi \neq 0)$ に対し，$\frac{1}{\|\phi\|} B_t(\phi)$ が，一次元 Brown 運動であるようなもの。

このとき，D. Dawson : Stochastic evolution equations and related measure processes. J. Multivariate Anal. 5 (1975) によって，方程式(4)の

$$\sup_{t\in[0,T]} E[\|X_t\|^2] < \infty \quad (^\forall T<\infty), \qquad X_t \in C([0,\infty), \mathcal{H}) \ (a.s.)$$

を満たす解の存在と一意性が示されている。

(I) まず，§2の一般化として，方程式(4)の解 $X_t = X_t^{(K)}$ の，$K\to\infty$ での極限を考える。ここでは，次のような仮定をおく。

$$\|a^*(X)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq K \quad , \quad \|b(X)\| \leq K \qquad \text{for } ^\forall X \in \mathcal{H}$$

次のように，四通りの場合に分けて，結論が得られる。

(i) A の最小固有値 $\lambda_1 = 0$ のとき，

P_r を，λ_1 に属する固有空間への直交射影として，次の方程式を考える。

$$\begin{cases} dY_t = P_r\, a(Y_t)\, dB_t + P_r\, b(Y_t)\, dt \\ Y_0 = P_r X_0 \end{cases}$$

この方程式の解は，例えば，M. Yor : Existence et unicité de diffusions à valeurs dans un espace de Hilbert. Ann. Inst. Poincaré 10 (1974) によって，一意的に存在し

$$Y_t \in C([0,\infty), P_r\mathcal{H}) \quad (a.s.)$$

であることがわかる。$X_t^{(K)}$ は，$K\to\infty$ のとき，次の意味で，

Y_t に近づく。： 確率1で，

$$\lim_{K\to\infty} \| X_t^{(K)} - Y_t \| = 0 \quad , \quad t \in (0,\infty) \text{ について広義一様}$$

が成立する。

(ii) $\lambda_1 > 0$ で，$a(0) \neq 0$ のとき，

$\{Y_t, t > 0\}$ を，次の特性汎関数をもつ独立な $\mathcal{H}$-値確率変数系とする。

$$E[e^{i\langle Y_t, \phi\rangle_{\mathcal{H}}}] = e^{-\frac{1}{2}|||\phi|||^2}$$

$$|||\phi|||^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{\langle a^*(0)\phi_j, a^*(0)\phi_k\rangle}{\lambda_j + \lambda_k} \langle \phi, \phi_j\rangle \langle \phi, \phi_k\rangle$$

このとき，$\sqrt{K}\, X_t^{(K)}$ は，次の意味で Y_t に近づく。

：$\forall n$，$0 < {}^{\forall}t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ，$\forall \psi_i \in \mathcal{H}$ $(i = 1, 2, \cdots n)$

に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \sqrt{K}\, X_{t_i}^{(K)}, \psi_i \rangle \xrightarrow[K\to\infty]{} \sum_{i=1}^{n} \langle Y_{t_i}, \psi_i \rangle \quad (\text{in law})$$

(iii) $\lambda_1 > 0$ で，$a(0) = 0$，$b(0) \neq 0$ のとき，

確率1で，

$$\lim_{K\to\infty} \| \sqrt{K}\, X_t^{(K)} - A^{-1} b(0) \| = 0 \quad , \quad t \in (0,\infty) \text{ について広義一様}$$

が成立する。

(iv) $\lambda_1 > 0$ で，$a(0) = 0$，$b(0) = 0$ のとき，

a，b は，$X = 0$ で Fréchet 微分可能であると仮定し，次の方程式を考える。

$$\begin{cases} dY_t = P_r a'(0)(Y_t)\, dB_t + P_r b'(0)(Y_t)\, dt \\ Y_0 = P_r X_0 \end{cases}$$

ここで，$a'(0)(\cdot)$ ，$b'(0)(\cdot)$ は，それぞれ，a，b の，0 での Fréchet derivative。やはり，この方程式の解 $Y_t \in C([0,\infty), \mathcal{P}_r\mathcal{H})$ (a.s.) の一意的な存在がいえ，

$$\lim_{K\to\infty} E[\| e^{\lambda_1 K t} X_t^{(K)} - Y_t \|^2] = 0,$$

$t \in (0,\infty)$ について広義一様

を示すことができる。

(II) 次に，方程式(2)の一般化，あるいは，方程式(4)の特殊化として，方程式(2)で，パラメーター σ のとり得る値の空間を $[0,1]$ から，$\mathbb{R}^n$ 内のある有界領域 G に拡張することを考える。ここで，G の境界は十分滑らかで，G は restricted cone property をもつとする。Hilbert 空間 $\mathcal{H}$，その上の作用素 A は，次のようなものであるとする。

$$\mathcal{H} = L^2(G, \mathbb{R}^d) = \sum_{i=1}^{d} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_i$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_i = \widetilde{\mathcal{H}} = L^2(G) \qquad (1 \leq i \leq d)$$

$$A = \sum_{i=1}^{d} \oplus A_i$$

各 A_i は，次のようにして決まる $\widetilde{\mathcal{H}}$ 上の閉作用素である。

(i) $\mathcal{D}(A_i) = \{u \in H^{2m}(G) ;\ B_j^i u = 0 \ \text{on } \partial D,\ 1 \leq j \leq m\}$

$m \in \mathbb{Z}^+$，$\{B_j^i\}_{j=1}^m$ は boundary operators の normal system.

(ii) $\mathcal{D}(A_i)$ 上, A_i は G 上の uniformly elliptic differential operator で定義されている。 $(A_i, \mathcal{D}(A_i))$ は, self-adjoint, non-negative op. であるとする。

a, b は, 先に述べたような条件を満たしているとする。従って, それぞれ,

$$a(X) = \{a_{ij}(X)\}_{1 \leq i,j \leq d}, \qquad a_{ij}(X) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})$$

$$b(X) = \{b_i(X)\}_{1 \leq i \leq d}, \qquad b_i(X) \in \tilde{\mathcal{H}}$$

と書ける。又, $\mathcal{H}$ 上の cylindrical Brownian motion B_t は, d 個の独立な $\tilde{\mathcal{H}}$ 上の cylindrical Brownian motions の系 $\{B_t^j\}_{j=1}^d$ であるから, 方程式(4)は, この場合には,

$$(4)' \begin{cases} dX_t^i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}(X_t)\,dB_t^j + b_i(X_t)\,dt - \kappa A_i X_t^i\,dt, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leq i \leq d \\ X_t = (X_t^i)_{i=1}^d \in \mathcal{H} \end{cases}$$

である。

R. Arima: On general boundary value problem for parabolic equations. J. Math. Kyoto Univ. 4 (1964) によれば, e^{-tA_i} の基本解 $p(t,\sigma,\tau) \in L^2(G \times G)$ (t: fix) は, 次のように評価されることが知られている。

$$\left|\frac{\partial}{\partial \tau_i} p(t,\sigma,\tau)\right| \leq C\, t^{-\frac{n+1}{2m}} \exp\left\{-C\left(\frac{|\sigma-\tau|^{2m}}{t}\right)^{\frac{1}{2m-1}}\right\}$$

$$(t,\sigma,\tau) \in (0,T) \times \overline{G} \times G, \quad 1 \leq i \leq n$$

この評価に注意すれば，方程式(4)′の解の連続性について，次のような結果が得られる。

<u>定理</u>　$C(\overline{G};\mathbb{R}^d)$に属する初期関数$X_0$をもつ，方程式(4)′の解$X_t(\sigma)$の$(t,\sigma)$についてjointly continuousなversion

$$X_t(\sigma)=X(t,\sigma)\in C([0,\infty)\times\overline{G},\ \mathbb{R}^d)\qquad(a.s.)$$

が存在する。