数理解析研究所講究録
第435巻 1981年 52-54

レイノルズ応力クロージァー・モデルの統計理論的構成

東大 生研　吉澤 徴

管内流等の非一様乱流において、平均流に対するN−S方程式は

$$\frac{DU^{\alpha}}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\right)U^{\alpha}$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x^{\alpha}} + \nu\frac{\partial^2 U^{\alpha}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\beta}} + \frac{\partial R^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} \qquad (1)$$

で与えられる。ここで、$\vec{U}$, Pは平均流速、平均圧力であり、レイノルズ応力$R^{\alpha\beta}$は擾乱流速$\vec{u}$を用いて

$$R^{\alpha\beta} = -\langle u^{\alpha}u^{\beta}\rangle \qquad (2)$$

と書ける。よく知られているように、(1)は$R^{\alpha\beta}$を含み閉じた系となっていないので、$R^{\alpha\beta}$に対する輸送方程式を考える。それは

$$\frac{DR^{\alpha\beta}}{Dt} = -\left(R^{\beta\gamma}\frac{\partial U^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} + R^{\alpha\gamma}\frac{\partial U^{\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right) + 2\nu\left\langle\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right\rangle - \left\langle p'\left(\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)\right\rangle$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(\langle u^\alpha u^\beta u^\gamma\rangle + \delta^{\alpha\gamma}\langle p' u^\beta\rangle + \delta^{\beta\gamma}\langle p' u^\alpha\rangle + \nu\frac{\partial R^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right). \tag{3}$$

上式において、pは擾乱圧力、右辺の各項は順に生産項、散逸項、再分配項、輸送項とよばれている。(3)もまた右辺に高次の速度相関を含み閉じていない。このため実際には種々の現象論的モデル化が行なわれており、本論文では統計論的モデルを提出する。

著者は最近、非一様乱流に対する一般理論を提出した(J. Phys. Soc. Jpn. 46 (1979); 47 (1979) 1665; 49 (1980) 1995)。それによると

$$R^{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}\Gamma\delta^{\alpha\beta} + \nu_e e^{\alpha\beta}\ ;\quad e^{\alpha\beta} = \frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{4}$$

$$\langle p'\left(\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\rangle = \zeta e^{\alpha\beta}, \tag{5}$$

$$\langle u^\alpha u^\beta u^\gamma\rangle = \langle p' u^\alpha\rangle = 0, \tag{6}$$

$$\Gamma = 0.66\,(\ell\epsilon)^{\frac{2}{3}}, \tag{7}$$

$$\nu_e = 0.053\,\ell^{\frac{4}{3}}\epsilon^{\frac{1}{3}}, \tag{8}$$

$$\zeta = 0.13\,(\ell\epsilon)^{\frac{2}{3}}. \tag{9}$$

ここで、ϵはエネルギー散逸、ℓは乱流の特性長さである。(7),(8),(9)を見ると、レイノルズ応力等は平均流速$\vec{U}$とℓ,

ε, Γ, ν_e, ξ の中の適当な2つによって書けることがわかる。そこで、$\vec{v}$ の他に、Γ と ν_e に本質的に同等な

$$\chi = \frac{1}{2}(\nu_e e^{\alpha\beta})^2$$

を用いる。この結果、$\vec{v}$, Γ, χ に対して

$$\frac{D\bar{v}^\alpha}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(P + \frac{2}{3}\Gamma\right) + \nu\frac{\partial^2 \bar{v}^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\left(\frac{\chi}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial \bar{v}^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \bar{v}^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\right], \qquad (10)$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = (\xi\chi)^{\frac{1}{2}} - 0.12\left(\frac{\xi}{\chi}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma^2, \qquad (11)$$

$$\frac{D\chi}{Dt} = 0.94(\xi\chi)^{\frac{1}{2}} - \frac{\eta\chi}{\xi}. \qquad (12)$$

上式において

$$\xi = \frac{1}{2}(e^{\alpha\beta})^2, \quad \eta = e^{\alpha\beta}e^{\beta\gamma}e^{\gamma\alpha}.$$

(10)−(12)は $\vec{v}$, Γ, χ に関して閉じた方程式系をつくり、いわゆる2−方程式モデルの一つである。

なお詳細は J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) No.5 を参照されたい。