数理解析研究所講究録
第 440 巻 1981 年 64-70

多重ガンマ函数の p-進類似について

東大 理　　村瀬 篤

§.1　Y. Morita [3] において，Γ-函数の p-進類似 $\Gamma_p(z)$ が構成されている。 p進ガンマ函数 $\Gamma_p(z)$ は，整数論，特に p-進L-函数の分野において極めて重要な意味をもつことが知られている。 その一つは，$\mathbb{Q}$上の p-進L函数の $s=0$ における derivative が，Γ_pの特殊値の p-進 log の $\mathbb{Q}$-係数の一次形式で表わされること（Ferrero-Greenberg [1]）であり，また，Γ_pの特殊値のある巾積が，Gauß の和で表わされること（Gross-Koblitz [2]）である。 一方，Barnes の導入した多重ガンマ函数が，代数体の abel 拡大の構成問題に大きな役割を果すであろうことが，Shintani [4] において予想されている。 従って，多重ガンマ函数の p-進類似が整数論において興味深いものであることを期待してもよいであろう。

この小文では，p-進多重ガンマ函数の構成の一つの試みを述べる。 別の構成法については，今井秀雄氏の

記事を参照してください。

§.2 多重ガンマ函数

$r \geqq 1$ とし，$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ を正実数の r-tuple とする。z ($\mathrm{Re}\, z > 0$), $s \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\zeta_r(s, z; \omega) = \sum_{m_1, \ldots, m_r = 0}^{\infty} (z + m_1\omega_1 + \cdots + m_r\omega_r)^{-s}$$

とおく。この級数は，$\mathrm{Re}\, s > r$ で絶対収束し，s の函数として全平面に有理型函数として解析接続され，特に $s = 0$ で正則である。

$$\Gamma_r^*(z; \omega) = (d/ds)\, \zeta_r(s, z; \omega)\big|_{s=0} \quad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$

とおくと，$\Gamma_r^*(z; \omega)$ は z の有理型函数として全平面に解析接続される。$\rho_r(\omega) = \mathrm{Res}_{z=0}\, \Gamma_r^*(z; \omega)$ とおくと，$\rho_r(\omega) \neq 0$ である。そこで

$$\Gamma_r(z; \omega) = \Gamma_r^*(z; \omega) / \rho_r(\omega)$$

とおいて，$\Gamma_r(z; \omega)$ を r-重ガンマ函数と呼ぶ。特に $r = 1$ のときは，$\Gamma_1(z; (\omega_1)) = \Gamma(z/\omega_1) \exp\{(z/\omega_1 - 1) \log \omega_1\}$ であり，正整数 m に対し

(1) $$\Gamma_1(m\omega_1; (\omega_1)) = \prod_{a=1}^{m-1} (a\omega_1)$$

と，簡明な表示をもつ。しかしながら，$r \geqq 2$ のときは，Γ_r の $z = m_1\omega_1 + \cdots + m_r\omega_r$ ($m_i \in \mathbb{Z}_+$) における特殊値の表示は，一

般に．極めて複雑である．　そこで，次のような函数 $B_r(z, x_1, \cdots, x_r; \omega)$ を導入する。　$z, x_1, \cdots, x_r \in \mathbb{C}$ に対し

$$B_r(z, x_1, \cdots x_r; \omega) = \prod_\delta \Gamma_r(z + \delta_1 x_1 \omega_1 + \cdots + \delta_r x_r \omega_r; \omega)。$$

ここで　$\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_r)$ は $\{0, 1\}^r$ のすべての元をわたるとし，$\varepsilon(\delta) = (-1)^{1+\delta_1+\cdots+\delta_r}$ とする。　このとき，Γ_r の関数等式（[4]）より，B_r の特殊値の簡明な表示が得られる。

命題 1　　正整数 $m_1, \cdots, m_r$ に対して

(2) $$B_r(z, m_1, \cdots, m_r; \omega) = \prod_{\substack{0 \le a_i < m_i \\ (i=1, \cdots, r)}} (z + a_1\omega_1 + \cdots + a_r\omega_r)$$

注意　　Shintani [4] で考察されている実2次体 F の ray class invariant $X_f(c)$ は，B_2 の特殊値によって記述される．（ここで，$\omega = (1, \varepsilon)$；$\varepsilon$ は F の総正基本単数）.

§.3　　p-進多重ガンマ函数

$\omega_1, \cdots, \omega_r$ を，$\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的整数とする。（$\omega_i > 0$ は仮定しない。）　$\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_r)$ としたときの (2) の右辺の expression の適当な modification を interpolate することにより，B_r の p-進類似と考えられるものを構成しよう。

$\mathbb{C}_p$ を，$\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包の完備化とし，$\mathbb{Q}_p$ の付値の $\mathbb{C}_p$ への延長を，$|\cdot|$ とかく。　$\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x| \le 1\}$，$\mathfrak{p} = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x| < 1\}$ とおく．　$z \in \mathcal{O}$，及び $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{Z}_+$

に対し，

$$(3) \qquad B_r^*(z, m_1, \cdots; m_r; \omega) = (-1)^{m_1 \cdots m_r} \prod_{\substack{0 \le a_i < m_i \\ |z + a_1\omega_1 + \cdots + a_r\omega_r| = 1}} (z + a_1\omega_1 + \cdots + a_r\omega_r)$$

とおく。　このとき，次が成立する。

<u>定理　1</u>　　$\mathfrak{P} \times \overbrace{p\mathbb{Z}_p \times \cdots \times p\mathbb{Z}_p}^{r個}$ から，$\mathbb{C}_p$ への連続函数 $B_{r,\mathfrak{P}}(z, s_1, \cdots, s_r; \omega)$ で，任意の $z \in \mathfrak{P}$ および p で割れる正整数 $m_1, \cdots, m_r$ に対して

$$B_{r,\mathfrak{P}}(z, m_1, \cdots, m_r; \omega) = B_r^*(z, m_1, \cdots, m_r; \omega)$$

が成りたつものが唯一つ存在する。

<u>定理　2</u>　　$\log_p B_{r,\mathfrak{P}}(z, s_1, \cdots, s_r)$ は，$\mathfrak{P} \times p\mathbb{Z}_p \times \cdots \times p\mathbb{Z}_p$ 上収束する $z, s_1, \cdots, s_r$ の巾級数に展開できる。

この $B_{r,\mathfrak{P}}(z, s_1, \cdots, s_r; \omega)$ を（ω に関する）p-進 r-重ガンマ函数と呼ぶ。

§.4　　<u>Special case</u>

$\omega_1, \cdots, \omega_r$ を，ある代数体 K の整数環の $\mathbb{Z}$-basis とする。　$\mathfrak{P} \cap K = \mathfrak{p}$ は，K の p を割る素 ideal（の1つ）である。　$K_\mathfrak{p}$ を，$\mathfrak{p}$ の定める付値による K の完備化，$\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ を $K_\mathfrak{p}$ の整数環，$\mathfrak{p}$ を $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ の maximal ideal とする。

<u>定理 3</u>　(＊) $N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p} = p$ を仮定する。
このとき，$\mathcal{O}_\mathfrak{p} \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$ 上の $\mathbb{C}_p$ に値をとる連続函数 $B'_{r,\mathfrak{p}}(z, s_1, \cdots, s_r; \omega)$ で，任意の $z \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$，$m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{Z}_+$ に対し，

$$B'_{r,\mathfrak{p}}(z, m_1, \cdots, m_r; \omega) = B_r^*(z, m_1, \cdots, m_r; \omega)$$

を満たすものが唯一つ存在する。

条件(＊)の下では，上の $B'_{r,\mathfrak{p}}$ と，定理1の $B_{r,\mathfrak{p}}$ は，$\mathfrak{p} \times p\mathbb{Z}_p \times \cdots \times p\mathbb{Z}_p$ 上一致している。$B'_{r,\mathfrak{p}}$ に対しては，次の函数等式が成立する。

<u>定理 4</u>　$1 \leq i \leq r$ に対し，

$$\begin{aligned} &B'_{r,\mathfrak{p}}(z, s_1, \cdots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \cdots, s_r; \omega) \\ &= B'_{r,\mathfrak{p}}(z, s_1, \cdots, s_r; \omega) \\ &\quad \times B'_{r-1,\mathfrak{p}}(z+s_i, s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_r; \omega^{(i)}) \\ &\qquad\qquad (z \in \mathcal{O}_\mathfrak{p},\ s_1, \cdots, s_r \in \mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

ここに，$\omega^{(i)} = (\omega_1, \cdots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \cdots, \omega_r)$ とする。

§. 5　<u>今後の問題</u>

(1) (Ferrero－Greenberg の結果に鑑み) 実2次体上の p－進L函数 $L_p(s, \chi)$ の $s = 0$ における derivative を $B_{2,\mathfrak{p}}$ の特殊値の p－進 log の $\overline{\mathbb{Q}}$－係数の一次形式で表

わすことができないか？

(2) 今井氏の構成されたp-進 log multiple gamma 函数との関係を調べること。（これがわかれば，$L_p'(0,\chi)$ は，今井氏のp-進特殊函数であらわされるから (1) も解決できるはずである。）

(3)（Gross-Koblitz の結果を鑑み） Br.予 の特殊値の適当な巾積が，$\overline{\mathbb{Q}}$ に属するという現象があるか？ また，その場合，その値の整数論的性質を調べること。

Reference

[1] Ferrero, B., — Greenberg, R., On the behavior of p-adic L-functions at s = 0 , Inv. math., **50** (1978), 91–102.

[2] Gross, B.–Koblitz, N., Gauss sums and the p-adic Γ-function , Ann. Math., **109** (1979), 569–581.

[3] Morita, Y., A p-adic analogue of the Γ-function, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 22 (1975), 255–266

[4] Shintani, T., On values at s = 1 of certain

L-functions of totally real algebraic number fields, Proc. Int. Conf. on Algebraic Number Theory, 1977.